

# Posloupnosti, limity a úvod do kombinatoriky

Lukáš Kokrda

Ekonomicko správní fakulta  
Masarykova Universita

podzim 2020

**Posloupnost** je určité pravidlo, podle kterého přiřazujeme přirozeným číslům jiná čísla, která nemusí nutně být přirozená.

**Tématický příklad.** Vezměme si posloupnost čísel

$$\{1, 3, 5, 7, \dots\}.$$

Snadno rozpoznáme pravidlo, které stanovuje členy posloupnosti a podle tohoto pravidla můžeme sestavit tabulku

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 1 \\ 2 & \rightarrow & 3 \\ 3 & \rightarrow & 5 \\ 4 & \rightarrow & 7 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Zůstaneme-li u zobrazení, pak můžeme říci, že posloupnost  $a$  je zobrazení přirozených čísel do množiny čísel reálných, tj.

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

## Důležitá poznámka

Posloupnost je každé zobrazení  $a$ , jehož definičním oborem jsou přirozená čísla a oborem hodnot je část množiny reálných čísel. Tedy  $\mathcal{D}(a) = \mathbb{N}$  a  $\mathcal{H}(a) \subseteq \mathbb{R}$ .

Stejně jako u přirozených čísel je přesně stanoveno, jak jdou po sobě, tak i posloupnost má pevně stanovené pořadí.

Výše jsme si řekli, že **posloupnost** je druhem zobrazení, která obvykle značíme  $f(n)$ . Přesto se u těchto speciálních zobrazení dělá „výjimka“ a **posloupnosti značíme**

$$a_n.$$

V různé literatuře, či na internetu, se můžeme setkat i se značením jiným, jako je například:

- $(a_n)$ ,
- $\{a_n\}$ ,
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

**Posloupnosti**, stejně jako mnohá jiná zobrazení, mohou být zadány více způsoby:

**Posloupnosti**, stejně jako mnohá jiná zobrazení, mohou být zadány více způsoby:

- **Výčtem členů**,  
např.  $\{1, 2, 1, 2, \dots\}$

**Posloupnosti**, stejně jako mnohá jiná zobrazení, mohou být zadány více způsoby:

- **Výčtem členů,**  
např.  $\{1, 2, 1, 2, \dots\}$
- **Rekurentním vzorcem,**  
např.  $a_{n+1} = a_n + 2, a_1 = 1$  nebo  
 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$

**Posloupnosti**, stejně jako mnohá jiná zobrazení, mohou být zadány více způsoby:

- **Výčtem členů**,  
např.  $\{1, 2, 1, 2, \dots\}$
- **Rekurentním vzorcem**,  
např.  $a_{n+1} = a_n + 2, a_1 = 1$  nebo  
 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$
- **Explicitním vzorcem pro  $n$ -tý člen**,  
např.  $a_n = \frac{1}{n^2}, a_n = n!, a_n = (-1)^n$



**Posloupnosti**, stejně jako mnohá jiná zobrazení, mohou být zadány více způsoby:

- **Výčtem členů**,  
např.  $\{1, 2, 1, 2, \dots\}$
- **Rekurentním vzorcem**,  
např.  $a_{n+1} = a_n + 2, a_1 = 1$  nebo  
 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$
- **Explicitním vzorcem pro  $n$ -tý člen**,  
např.  $a_n = \frac{1}{n^2}, a_n = n!, a_n = (-1)^n$

V předešlých příkladech jsme se již setkali se zadáním posloupnosti. Uvedenému způsobu říkáme **pomocí výčtu členů**. Správně bychom měli říci, že jsme zadali posloupnosti pomocí výčtu prvních několika členů.

## Úkol:

Zadejte posloupnost lichých čísel  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

## Úkol:

Zadejte posloupnost lichých čísel  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

- 1 rekurentním vzorcem,

## Úkol:

Zadejte posloupnost lichých čísel  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

- 1 rekurentním vzorcem,

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

## Úkol:

Zadejte posloupnost lichých čísel  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

- 1 rekurentním vzorcem,

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

- 2 explicitním vzorcem.

## Úkol:

Zadejte posloupnost lichých čísel  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$

- 1 rekurentním vzorcem,

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

- 2 explicitním vzorcem.

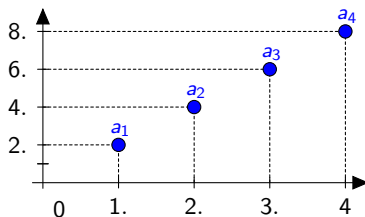
$$a_n = -1 + 2n$$

Již jsme řekli, že **posloupnost** je **speciálním druhem zobrazení** jehož definičním oborem jsou přirozená čísla (nebo jejich část). Proto vlastnosti posloupností budou **podobné** jako vlastnosti funkcí

**Monotonie** - tendence chování posloupnosti s každým dalším členem

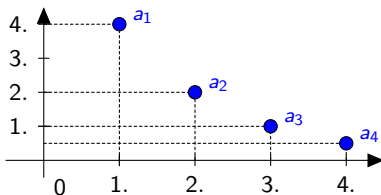
- rostoucí,
- klesající,
- nerostoucí,
- neklesající.

## Rostoucí posloupnost



První čtyři členy posloupnosti  $a_n = 2 \cdot n$ .

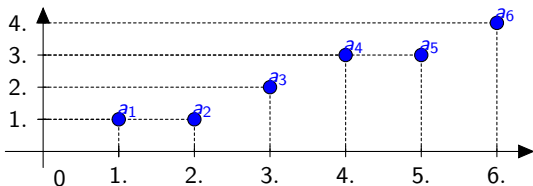
## Klesající posloupnost:



První čtyři členy posloupnosti  $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$ ,  $a_1 = 4$ .

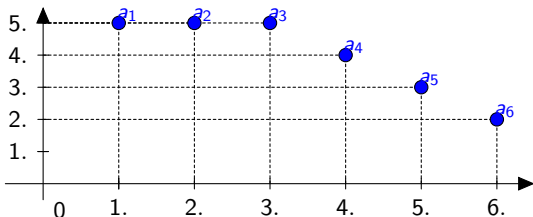


## Neklesající



Prvních šest členů posloupnosti  $a_n = \{1, 1, 2, 3, 3, 4, \dots\}$ .

## Nerostoucí posloupnost:



Prvních šest členů posloupnosti  $a_n = \{5, 5, 5, 4, 3, 2, 1, \dots\}$ .

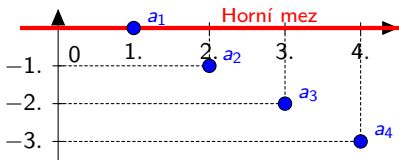
**Ohraničenost** nám u posloupností udává informaci o tom, zda má posloupnost nějakou mez.

Například posloupnost, která pro žádný člen nenabývá hodnoty menší než nula. Pak o takové posloupnosti řekneme, že je zdola ohraničená.

Rozlišujeme tyto případy ohraničenosti:

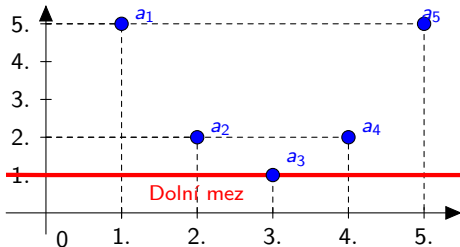
- shora ohraničená,
- zdola ohraničená,
- ohraničená (současně zdola i shora),
- neohraničená.

## Shora ohraničená:



Shora ohraničená posloupnost  $a_n = 1 - n$ .

## Zdola ohraničená:



Zdola ohraničená posloupnost  $a_n = (n - 3)^2 + 1$ .

Existuje více druhů posloupností:

Existuje více druhů posloupností:

- 1 aritmetická posloupnost,  $a_n = a_0 + n \cdot d$

Existuje více druhů posloupností:

- 1 aritmetická posloupnost,  $a_n = a_0 + n \cdot d$
- 2 geometrická posloupnost,  $a_n = a_0 \cdot q^n$

Existuje více druhů posloupností:

- 1 aritmetická posloupnost,  $a_n = a_0 + n \cdot d$
- 2 geometrická posloupnost,  $a_n = a_0 \cdot q^n$
- 3 Fibonacciho posloupnost,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = 1, a_2 = 1$

Existuje více druhů posloupností:

- 1 aritmetická posloupnost,  $a_n = a_0 + n \cdot d$
- 2 geometrická posloupnost,  $a_n = a_0 \cdot q^n$
- 3 Fibonacciho posloupnost,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = 1, a_2 = 1$
- 4 harmonická posloupnost,  $a_n = \frac{1}{a_0 + n \cdot d}$



Existuje více druhů posloupností:

- 1 aritmetická posloupnost,  $a_n = a_0 + n \cdot d$
- 2 geometrická posloupnost,  $a_n = a_0 \cdot q^n$
- 3 Fibonacciho posloupnost,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1$
- 4 harmonická posloupnost,  $a_n = \frac{1}{a_0 + n \cdot d}$
- 5 aritmeticko-geometrická posloupnost.  $a_n = (a_0 + n \cdot d) \cdot q^n$

Existuje více druhů posloupností:

- 1 aritmetická posloupnost,  $a_n = a_0 + n \cdot d$
- 2 geometrická posloupnost,  $a_n = a_0 \cdot q^n$
- 3 Fibonacciho posloupnost,  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = 1, a_2 = 1$
- 4 harmonická posloupnost,  $a_n = \frac{1}{a_0 + n \cdot d}$
- 5 aritmeticko-geometrická posloupnost.  $a_n = (a_0 + n \cdot d) \cdot q^n$

V této přednášce se více zaměříme na první dvě

Jako **Fibonacciho posloupnost** je v matematice označována nekonečná posloupnost přirozených čísel, začínající 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... (čísla nacházející se ve Fibonacciho posloupnosti jsou někdy nazývána Fibonacciho čísla), kde každé číslo je součtem dvou předchozích.

**Zlatý řez**  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

**Aritmetická posloupnost** je druhem matematické posloupnosti, která se vyznačuje stálým rozdílem mezi libovolnými dvěma sousedními členy. Tento stálý rozdíl se nazývá **diference** a značí se písmenem  $d$ .

**Pozor**, číslo  $d$  může mít i zápornou hodnotu nebo může být rovno nule!

**Rekurentní zápis:**  $a_{n+1} = a_n + d$

**Explicitní zápis:**  $a_n = a_0 + n \cdot d$

# Aritmetická posloupnost

Setkáváme se i s případy, kdy nás zajímá hodnota nějakého členu posloupnosti, ale namísto prvního členu  $a_1$  známe hodnotu jiného.

## Vzoreček

*Vzorec  $r$ -tého členu z  $s$ -tého* Jedná se o vzorec, který se označuje jako **vzorec  $r$ -tého členu z  $s$ -tého** a zní

$$a_r = a_s + (r - s) \cdot d.$$

*Zde je  $a_r$  hledaný člen a  $a_s$  člen, který známe.*

*Vzorec pro určení diference*

$$d = \frac{a_r - a_s}{r - s}$$

Pokud bychom položili  $r = n$  a  $s = 1$ , pak obdržíme

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

**Geometrická posloupnost** je druh matematické posloupnosti, kde každý člen kromě prvního je stálým násobkem předchozího členu. Tento násobek se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti, značí se  $q$ , a pro posloupnosti s nenulovými členy je roven podílu libovolného členu kromě prvního a členu předchozího.

**Rekurentní zápis:**  $a_{n+1} = a_n \cdot q$

**Explicitní zápis:**  $a_n = a_0 \cdot q^n$

# Geometrická posloupnost

Setkáváme se i s případy, kdy nás zajímá hodnota nějakého členu posloupnosti, ale namísto prvního členu  $a_1$  známe hodnotu jiného.

## Vzoreček

*Vzorec  $r$ -tého členu z  $s$ -tého* Jedná se o vzorec, který se označuje jako **vzorec  $r$ -tého členu z  $s$ -tého** a zní

$$a_r = a_s \cdot q^{(r-s)}$$

*Zde je  $a_r$  hledaný člen a  $a_s$  člen, který známe.*

*Vzorec pro určení kvocientu*

$$q = \sqrt[r-s]{\frac{a_r}{a_s}}$$

Pokud bychom položili  $r = n$  a  $s = 1$ , pak obdržíme

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}.$$

Někdy je třeba sečíst určitý počet, nebo dokonce všechny členy posloupnosti. Tento problém lze zapsat celým výčtem, který bývá značně rozsáhlý, nebo zkrácený, kde se vypíše několik členů součtu a pomocí „...“ se zápis zkrátí, ale zde může dojít k nepřesnostem, či dokonce k nepochopení záměru. Z tohoto důvodu se zavedly takzvané **sumy**.

$$\text{Součtový zápis } \sum_{i=1}^n a_i; \quad \text{Zápis násobení } \prod_{i=1}^n a_i$$

- Znak  $\sum$  označuje **součet**,  $\prod$  označuje **násobení**
- $i = 1$  určuje, jak rozlišujeme jednotlivé prvky a zároveň od které hodnoty začínáme
- $n$  určuje, kterou hodnotou indexu končíme



# Často používané sumační triky

V některých případech nechcete sčítat všechny prvky, ale například všechny sudé, liché, případně střídavě měnit znaménka vybraných členů

- Součet sudých členů  $\sum_{i=1}^n a_{2i}$

# Často používané sumační triky

V některých případech nechcete sčítat všechny prvky, ale například všechny sudé, liché, případně střídavě měnit znaménka vybraných členů

- Součet sudých členů  $\sum_{i=1}^n a_{2i}$
- Součet lichých členů  $\sum_{i=1}^n a_{2i-1}$  (součet od 1.)

# Často používané sumační triky

V některých případech nechcete sčítat všechny prvky, ale například všechny sudé, liché, případně střídavě měnit znaménka vybraných členů

- Součet sudých členů  $\sum_{i=1}^n a_{2i}$
- Součet lichých členů  $\sum_{i=1}^n a_{2i-1}$  (součet od 1.)
- Součet lichých členů  $\sum_{i=1}^n a_{2i+1}$  (součet od 3.)

# Často používané sumační triky

V některých případech nechcete sčítat všechny prvky, ale například všechny sudé, liché, případně střídavě měnit znaménka vybraných členů

- Součet sudých členů  $\sum_{i=1}^n a_{2i}$
- Součet lichých členů  $\sum_{i=1}^n a_{2i-1}$  (součet od 1.)
- Součet lichých členů  $\sum_{i=1}^n a_{2i+1}$  (součet od 3.)
- Střídání znamének  $\sum_{i=1}^n (-1)^i a_i$  (1. záporný)

# Často používané sumační triky

V některých případech nechcete sčítat všechny prvky, ale například všechny sudé, liché, případně střídavě měnit znaménka vybraných členů

- Součet sudých členů  $\sum_{i=1}^n a_{2i}$
- Součet lichých členů  $\sum_{i=1}^n a_{2i-1}$  (součet od 1.)
- Součet lichých členů  $\sum_{i=1}^n a_{2i+1}$  (součet od 3.)
- Střídání znamének  $\sum_{i=1}^n (-1)^i a_i$  (1. záporný)
- Střídání znamének  $\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_i$  (1. kladný)

- Zapište součet druhých mocnin prvních 10 členů

- Zapište součet druhých mocnin prvních 10 členů

$$\sum_{i=1}^{10} a_i^2$$

- Zapište součet rozdílů po sobě jdoucích lichých a sudých 10 členů

- Zapište součet druhých mocnin prvních 10 členů

$$\sum_{i=1}^{10} a_i^2$$

- Zapište součet rozdílů po sobě jdoucích lichých a sudých 10 členů

$$\sum_{i=1}^{10} (-1)^{i+1} a_i \text{ alternativně } \sum_{i=1}^5 a_{2i-1} - \sum_{i=1}^5 a_{2i}$$



- Zapište aritmetický průměr posloupnosti o 100 členech

- Zapište aritmetický průměr posloupnosti o 100 členech

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} a_i}{100}$$

- Zapište geometrický průměr  $n$  členů

- Zapište aritmetický průměr posloupnosti o 100 členech

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} a_i}{100}$$

- Zapište geometrický průměr  $n$  členů

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

- Zapište součet čísel od 1 do 100

- Zapište aritmetický průměr posloupnosti o 100 členech

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} a_i}{100}$$

- Zapište geometrický průměr  $n$  členů

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$$

- Zapište součet čísel od 1 do 100

$$\sum_{i=1}^{100} i$$

- Definujte skalární součin dvou vektorů pomocí sumy

- Definujte skalární součin dvou vektorů pomocí sumy

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n (u_i \cdot v_i)$$

- Definujte součin matic pomocí sumy  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

- Definujte skalární součin dvou vektorů pomocí sumy

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n (u_i \cdot v_i)$$

- Definujte součin matic pomocí sumy  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

$$(c_{ij}) = \sum_{k=1}^m (a_{ik} \cdot b_{kj})$$

Některé zápisy jsou příliš složité na to aby je bylo možné zapsat pomocí jedné sumy. Například zápis součtu všech prvků matice  $\mathbf{A}$ .

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \text{ případně } \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} \right)$$

Dvojitá suma jde použít i k sofistikovanějším zápisům, například součtu prvků pod hlavní diagonálou matice včetně diagonály

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij}$$



**Úkol:** Sečtěte čísla od 1 do sta.

*Tady víc než kde jinde platí, že matematika není o počítání, ale o tom jak se počítání vyhnout.*

# Aritmetická posloupnost

Seřadíme za sebe všechna čísla od 1 do 100 a utvoříme dvojice: první číslo s poledním, druhé s předposledním, atd.

# Aritmetická posloupnost

Seřadíme za sebe všechna čísla od 1 do 100 a utvoříme dvojice: první číslo s poledním, druhé s předposledním, atd.

Součet v každé dvojici bude přesně 101. Dále takovýchto párů vznikne přesně 50, což je polovina z čísla 100. Pak nám už zbývá jen obě čísla vynásobit a výsledek 5050 je na světě.

# Aritmetická posloupnost

Seřadíme za sebe všechna čísla od 1 do 100 a utvoříme dvojice: první číslo s poledním, druhé s předposledním, atd.

Součet v každé dvojici bude přesně 101. Dále takovýchto párů vznikne přesně 50, což je polovina z čísla 100. Pak nám už zbývá jen obě čísla vynásobit a výsledek 5050 je na světě.

Tímto způsobem můžeme každou dvojici přepsat jako  $a_1 + a_n$  a těchto dvojic bude polovina z celkového počtu sčítaných členů.

Protože je počet členů  $n$ , potom počet všech dvojic (součtů) je  $\frac{n}{2}$ . Nyní, když vynásobíme obě čísla, získáme součet  $s_n$  prvních  $n$  členů a odpovídající vzorec je tvaru

# Aritmetická posloupnost

Seřadíme za sebe všechna čísla od 1 do 100 a utvoříme dvojice: první číslo s poledním, druhé s předposledním, atd.

Součet v každé dvojici bude přesně 101. Dále takovýchto párů vznikne přesně 50, což je polovina z čísla 100. Pak nám už zbývá jen obě čísla vynásobit a výsledek 5050 je na světě.

Tímto způsobem můžeme každou dvojici přepsat jako  $a_1 + a_n$  a těchto dvojic bude polovina z celkového počtu sčítaných členů.

Protože je počet členů  $n$ , potom počet všech dvojic (součtů) je  $\frac{n}{2}$ . Nyní, když vynásobíme obě čísla, získáme součet  $s_n$  prvních  $n$  členů a odpovídající vzorec je tvaru

$$s_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n).$$

Pří hře ruleta existuje schéma, které by mělo zaručovat v ideálním případě po několika hrách jistý zisk (pravděpodobně po několika opakování je to zakázané). Sázíme pouze na barvu (červená/černá) první vklad je 10 Kč pokud uhádneme je výhra je 20 Kč, jestliže neuhádneme vsadíme 20 Kč. Uhádneme-li máme 40, neuhádneme vsadíme v další hře 40. Určete: a) kolik utratíme jestliže uspějeme až v šesté hře b) v kolikáté hře musíme uspět, abychom měli zisk právě 10 Kč?

# Geometrická posloupnost

Z řešení předchozího příkladu máme součet prvních 6 členů, lze vyvodit, že

$$10(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) = 10 \cdot (2^6 - 1).$$

# Geometrická posloupnost

Z řešení předchozího příkladu máme součet prvních 6 členů, lze vyvodit, že

$$10(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) = 10 \cdot (2^6 - 1).$$

Kdybychom sázeli trojnásobek změnil by se předchozí zápis

$$10(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) = 10 \cdot (3^6 - 1)/2.$$



# Geometrická posloupnost

Z řešení předchozího příkladu máme součet prvních 6 členů, lze vyvodit, že

$$10(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) = 10 \cdot (2^6 - 1).$$

Kdybychom sázeli trojnásobek změnil by se předchozí zápis

$$10(3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) = 10 \cdot (3^6 - 1)/2.$$

## Vzoreček

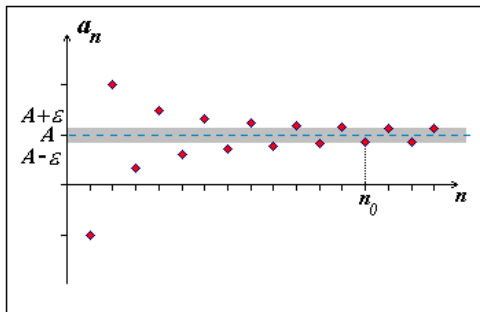
*Součet prvních  $n$  členů geometrické posloupnosti*

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

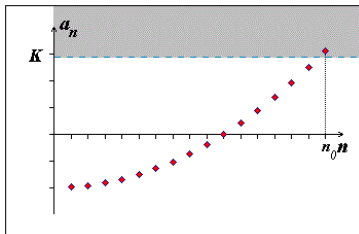
# Limita posloupnosti

Posloupnost  $\{a_n \in \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}$  má vlastní limitu  $A$ , (konverguje k limitě  $A \in \mathbb{R}$ , je konvergentní) jestliže ke každému  $\epsilon > 0$  existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro všechna  $n > n_0$  platí

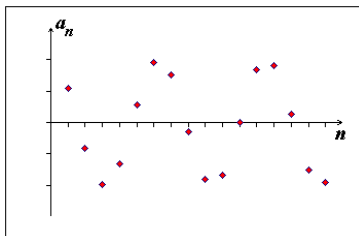
$$|a_n - A| < \epsilon.$$



## Nevlastní limita



## Neexistence limity



# Základní vlastnosti

Posloupnost se nazývá **konvergentní**, pokud má vlastní (reálnou) limitu  $A$ . Posloupnost se nazývá **divergentní**, pokud není konvergentní.

Nechť  $(a_n)$  a  $(b_n)$  jsou konvergentní posloupnosti a necht'  $\lim a_n = A$ ,  $\lim b_n = B$  a  $c$  je libovolné reálné číslo.

# Základní vlastnosti

Posloupnost se nazývá **konvergentní**, pokud má vlastní (reálnou) limitu  $A$ . Posloupnost se nazývá **divergentní**, pokud není konvergentní.

Nechť  $(a_n)$  a  $(b_n)$  jsou konvergentní posloupnosti a necht'  $\lim a_n = A$ ,  $\lim b_n = B$  a  $c$  je libovolné reálné číslo. Potom jsou konvergentní posloupnosti  $(a_n + b_n)$ ,  $(a_n - b_n)$ ,  $(a_n b_n)$ ,  $(c \cdot a_n)$  a platí

# Základní vlastnosti

Posloupnost se nazývá **konvergentní**, pokud má vlastní (reálnou) limitu  $A$ . Posloupnost se nazývá **divergentní**, pokud není konvergentní.

Nechť  $(a_n)$  a  $(b_n)$  jsou konvergentní posloupnosti a necht'  $\lim a_n = A$ ,  $\lim b_n = B$  a  $c$  je libovolné reálné číslo. Potom jsou konvergentní posloupnosti  $(a_n + b_n)$ ,  $(a_n - b_n)$ ,  $(a_n b_n)$ ,  $(c \cdot a_n)$  a platí

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = A + B$$

$$\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = A - B$$

$$\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n = AB$$

$$\lim(c \cdot a_n) = c \cdot \lim a_n = c \cdot A$$

Nyní k samotnému výpočtu limit, jedná se pouze o „dosazení“ požadovaného „čísla“ do daného předpisu (v případě posloupností  $\infty$ ), pokud výsledek je reálné číslo, pak je limita rovna tomuto číslu. Může ale dojít k takzvaným **neurčitým výrazům**

Nyní k samotnému výpočtu limit, jedná se pouze o „dosazení“ požadovaného „čísla“ do daného předpisu (v případě posloupností  $\infty$ ), pokud výsledek je reálné číslo, pak je limita rovna tomuto číslu. Může ale dojít k takzvaným **neurčitým výrazům** **Neurčité**

**výrazy:**  $\pm \frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty - \infty$



Nyní k samotnému výpočtu limit, jedná se pouze o „dosazení“ požadovaného „čísla“ do daného předpisu (v případě posloupností  $\infty$ ), pokud výsledek je reálné číslo, pak je limita rovna tomuto číslu. Může ale dojít k takzvaným **neurčitým výrazům** **Neurčité**

**výrazy:**  $\pm \frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty - \infty$

Pokud limita po dosazení vyjde v jednom z výše uvedeném tvaru je třeba ji upravit.

Nyní k samotnému výpočtu limit, jedná se pouze o „dosazení“ požadovaného „čísla“ do daného předpisu (v případě posloupností  $\infty$ ), pokud výsledek je reálné číslo, pak je limita rovna tomuto číslu. Může ale dojít k takzvaným **neurčitým výrazům** **Neurčité**

**výrazy:**  $\pm \frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty - \infty$

Pokud limita po dosazení vyjde v jednom z výše uvedeném tvaru je třeba ji upravit.

Neplést ale s určitými výrazy

Nyní k samotnému výpočtu limit, jedná se pouze o „dosazení“ požadovaného „čísla“ do daného předpisu (v případě posloupností  $\infty$ ), pokud výsledek je reálné číslo, pak je limita rovna tomuto číslu. Může ale dojít k takzvaným **neurčitým výrazům** **Neurčité**

**výrazy:**  $\pm \frac{\infty}{\infty}$ ,  $\frac{0}{0}$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty - \infty$

Pokud limita po dosazení vyjde v jednom z výše uvedeném tvaru je třeba ji upravit.

Neplést ale s určitými výrazy

**Určité výrazy:**  $\frac{\pm 1}{\infty} = 0$ ,  $\frac{\pm 1}{0} = \pm \infty$ ,  $\frac{0}{\infty} = 0$

- Určete limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$

# Výpočty limit - příklady

- Určete limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

- Určete limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 - n}$

- Určete limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

- Určete limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 - n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)}{n^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

- Určete limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2 - 100n + 4000}$

- Určete limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

- Určete limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 - n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)}{n^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

- Určete limitu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2 - 100n + 4000}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2 - 100n + 4000} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 3}{n^2 \cdot \left(1 - \frac{100}{n} + \frac{4000}{n^2}\right)} = \frac{3}{1}$$

Studenti jazykového gymnázia mají na výběr ze čtyř jazyků (angličtiny, němčiny, francouzštiny, ruštiny), během studia se budou věnovat právě dvěma jazykům. Kolika způsoby mohou studenti vybírat? Máme množinu  $J = \{A, N, F, R\}$ , potom  $\text{card}J = 4$ .

Student tedy může vybírat z:

$\{A, N\}, \{A, F\}, \{A, R\}, \{N, F\}, \{N, R\}, \{F, R\}$ .

$$\binom{4}{2} = 6$$



Chceme-li vybrat  $k$ -prvkové podmnožiny z  $n$ -prvkové množiny, pak toto můžeme vyjádřit kombinačním číslem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k-1)}{k!}$$

Pro  $k, n \in \mathbb{N}$  a  $n \geq k$  platí:

- $\binom{0}{0} = 1,$

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$

- $\binom{n}{1} = n,$

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$

- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

# Modifikujme příklad 1

Při studiu si student vybírá tři jazyky ze čtyř, kde jazyk na prvním místě je hlavní (C1), jazyk na druhém místě je vedlejší (B2) a na třetím místě je doplňkový jazyk (A2). Vypište všechny možnosti. Pak je zřejmé, že výběr  $A, N, R$  NENÍ stejný jako výběr  $N, R, A$ .

# Modifikujme příklad 1

Při studiu si student vybírá tři jazyky ze čtyř, kde jazyk na prvním místě je hlavní (C1), jazyk na druhém místě je vedlejší (B2) a na třetím místě je doplňkový jazyk (A2). Vypište všechny možnosti. Pak je zřejmé, že výběr  $A, N, R$  NENÍ stejný jako výběr  $N, R, A$ .

<b>A,N,R</b>	N,R,A	R,A,N	A,R,N	N,A,R	R,N,A
<b>A,N,F</b>	N,F,A	F,A,N	A,F,N	N,A,F	F,N,A
<b>A,F,R</b>	F,R,A	R,A,F	A,R,F	F,A,R	R,F,A
<b>F,N,R</b>	N,R,F	R,F,N	F,R,N	N,F,R	R,N,F

Počet všech možností z příkladu výše můžeme vyjádřit jako:

$$6 \cdot \binom{4}{3} = 24, \quad \text{kde } 6 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Tento výpočet můžeme napsat obecně

$$k! \cdot \binom{n}{k} = k! \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Na večírek jisté firmy je pro zaměstnance připravena barmanská ahow(B), raut (R), živá hudba (H), degustace vín (D). Žádné dvě akce neprobíhají zároveň. Kolika způsoby může akce na večírku uspořádat?

**B,R,H,D**   D,B,R,H   H,D,B,R   R,H,D,B   B,D,R,H  
**B,H,D,R**   B,R,H,D   B,D,H,R   ...   ...  
**R,D,H,B**   ...   ...  
**B,D,H,R**

Počet všech možností můžeme vyjádřit obdobně jako v předchozím příkladu

$$24 \cdot \binom{4}{4} = 24 \cdot 1, \quad \text{kde } 24 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Tento výpočet lze zobecnit na pro  $n$  prvků a vyjádřit pak vzorcem:

$$n! \binom{n}{n} = n! \cdot \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = n!$$

Postupně jak šla přednáška, tak jsem zavedli:

- **Kombinace**

$$K(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **Variace**

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Permutace**

$$P(n) = n!$$



Pro celkovou ucelenost, zavedeme všechny předchozí možnosti s opakováním:

- **Kombinace**

$$K'(n, k) = \binom{n + k + 1}{k}$$

- **Variace**

$$V'(n, k) = n^k$$

- **Permutace**

$$P'(n) = \binom{(k_1 + k_2 \dots k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n}$$