PRÁCE OPRAVOVANÁ TUTOREM

Matematika 2, kombinované studium, 2022

JMÉNO (hůlkovým písmem):	....
UČO:	....
Datum odevzdání:	....
Podpis:	....

POT musí být vypracován RUČNĚ (prosím o slušnou úpravu, nečitelné řešení nebude hodnoceno). U úloh se hodnotí nejen výsledné řešení, ale též POSTUP! Pro ověření správnosti výsledků lze použít výpočetní programy. Práci je nutné odevzdat v papírové podobě na posledním tutoriálu nebo vložit naskenovanou jako **1 soubor formátu pdf** do odevzdávárny nejpozději do 31.12.2022.

Zadání úloh

Příklad 1: Pro následující matice najděte vlastní čísla a také vektory, které odpovídají reálným vlastním číslům.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Příklad 2: Určte matici kvadratické formy a pomocí Sylvestrova kritéria rozhodněte o její definitnosti:

a) $24x^2 + 3y^2 - 2yz + 2z^2 - 12xy + 4xz$ b) $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 6yz + 3z^2$
c) $-x_1^2 + 4x_1x_2 + 10x_2x_3 + 4x_2^2 + 6x_3^2$ d) $-x^2 + 2xy - 5y^2 - 4yz - z^2$

Příklad 3: Najděte lineární aproximaci (Taylorův polynom prvního řádu) v bodě $[1, 1]$ pro funkce

a) $f(x, y) = e^{-xy}$

b) $f(x, y) = 2e^{x^2-y^2}$

c) $f(x, y) = \ln(1 + xy^2)$

d) $f(x, y) = 1 + \ln(2x - y)$

Příklad 4: Načrtněte uvedené množiny a rozhodněte, zda jsou konvexní:

a) $\{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 9\}$

b) $\{(x,y) : xy \leq 1\}$

c) $\{(x,y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ xy \geq 1\}$

d) $\{(x,y) : x + y \leq 3\}$

Příklad 5: Rozhodněte o konvexitě/konkávnosti uvedených funkcí na množině $M = \{(x,y), x > 0, \text{ a } y > 0\}$. Zdůvodněte!

a) $z = x + y^2 - e^x$

b) $z = e^{x+y} - \frac{y}{2}$

c) $z = \ln(x + 2y)^2$

d) $z = \mathrm{e}^{2x \cdot y}$

Příklad 6: Použitím grafické metody řešte problémy lineárního programování a určete, která omezení jsou v bodě optima aktivní (mají nenulovou stínovou cenu). Zapište též duální problém.

a) $max\ \ 3x_1 + 4x_2$ s podmínkami $\left\{ \begin{array}{rcl} 3x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\ x_1 + 4x_2 & \leq & 4 \end{array} \right.$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

b) $max\ \ 2x + 7y$ s podmínkami $\left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 5y & \leq & 20 \\ 3x + 7y & \leq & 21 \end{array} \right.$ $x \geq 0,\ y \geq 0$

c) $max\ \ x + y$ s podmínkami $\left\{ \begin{array}{rcr} -x + 2y & \geq & 6 \\ x + 2y & \geq & 10 \\ 3x + y & \leq & 15 \end{array} \right.$

d) $min\ \ y - x$ s podmínkami $\left\{ \begin{array}{rcr} 2x + 3y & \leq & 12 \\ -2x + y & \leq & -1 \end{array} \right.$ $x \geq 0,\ y \geq 2$

Příklad 7: Pro každou z úloh formulujte matematický model a výsledný problém lineárního programování řešte graficky.

a) Jste vedoucí stavebního úřadu. Vaše oddělení provádí kolaudaci dvou typů nových komerčních budov – čerpacích stanic a restaurací. Závěrečná kolaudace zahrnuje práci tří samostatných inspektorů: instalatéra, elektrikáře a stavebního inspektora.

- Instalatér 4 hodiny kontroluje čerpací stanici a 2 hodiny restauraci.
- Elektrikář 2 hodiny kontroluje čerpací stanici a 6 hodin restauraci.
- Stavební inspektor 4 hodiny kontroluje čerpací stanici a 6 hodin restauraci.

S ohledem na dobu potřebnou pro plnění jiných úkolů, instalatér provádí inspekce 28 hodin týdně; elektrikář 30 hodin; a stavební inspektor 36 hodin.

Jaký maximální počet komerčních budov dokážete za týden zkontrolovat?

b) V keramické dílně vyrábějí designové misky a hrnky. K výrobě je potřeba pouze speciální keramická hlína a kvalifikovaná pracovní síla. Tabulka uvádí náročnost jednotlivých produktů na výrobní zdroje společně s jejich prodejní cenou.

Výrobek	Práce (hodin/ks)	Hlína (kg/ks)	Příjem (Kč/ks)
Miska	1	0,4	40
Hrnek	2	0,3	50

Dílna má na týden k dispozici 1 pracovníka s 40-hodinovým pracovním týdnem a 12 kg hlíny, odbyt je zajištěn prostřednictvím partnerské firmy. Rozvrhněte výrobu mezi jednotlivé výrobky tak, aby byl maximalizován zisk.

c) Město má dvě spalovny komunálního odpadu. Spalovna A zpracuje 1 tunu odpadu za 3,80 EUR a její kapacita je 28 tun denně. Spalovna B s denní kapacitou 30 tun zpracuje 1 tunu odpadu za 4,25 EUR. Město produkuje denně 100 tun odpadu, přičemž veškerý odpad, který se nezpracuje ve spalovnách, musí být uložen na skládce za cenu 5 EUR za tunu. Město chce minimalizovat náklady na zpracování komunálního odpadu, ale musí respektovat environmentální omezení, která limitují denní produkci znečišťujících látek ve spalovnách na 180 kg uhlovodíků a 640 kg pevných částic. Spalovna A produkuje 3 kg uhlovodíků a 20 kg pevných částic na 1 tunu spáleného odpadu, spalovna B 5 kg uhlovodíků a 10 kg pevných částic na 1 tunu spáleného odpadu. Určete optimální množství odpadu, které má být zpracováno v městských spalovnách.

d) Specializovaný zemědělský obchod prodává směsi hnojiv s obchodními názvy Gro-Plus a Crop-Fast. Směsi mají různý obsah účinných látek, viz tabulka:

Značka	Dusík (kg/balení)	Fosfor (kg/balení)
Gro-Plus	2	4
Crop-Fast	4	3

Zemědělské družstvo potřebuje pro svá pole minimálně 16 kg dusíku a 24 kg fosforu. Jedno balení Gro-Plus stojí 60 Kč, zatímco balení Crop-Fast je jen za 30 Kč. Navrhněte družstvu, nejlevnější kombinaci hnojiv, tak aby byly splněny požadavky na obsah účinných látek.

Příklad 8: Užitím metody Lagrangeových multiplikátorů řešte problém a pomocí zjištěné hodnoty multiplikátoru **odhadněte**, o kolik se zvýší optimum při změně omezení o $0,1$.

a) max $2\ln(x) + \ln(y)$ za podmínky $x + y = 1$.

b) min $2x + 3y - 4$ za podmínky $x \cdot y = 6$.

c) min $e^{x/2} + e^{y}$ za podmínky $x + 2y = 4$.

d) min $x + 4y^2$ za podmínky $x \cdot y = 1$.

Příklad 9: Pro daný optimalizační problém sestavte Lagrangeovu funkci a vyjádřete Kuhn-Tuckerovy podmínky pro optimální řešení.

a) *max* $2 - x^2 - y^2$ s podmínkami $x \geq 1$ *a* $y \geq 2$

b) *min* $x^2 + x + y^2$ za podmínky $x^2 + y^2 \leq 1$.

c) *min* $(x+1)^2 + \frac{1}{4}y^2$ za podmínky $2x + y \geq 4$.

d) *min* $(x-1)^2 + 2(y-2)^2$ za podmínky $x - y \geq 0$.

Příklad 10: Spotřebitel má užitkovou funkci $F(x, y)$, kde x je množství výrobku A a y množství výrobku B. Vyjádřete pro něj mezní míru substituce mezi A a B (tj. $-y'(x)$) a a vyčíslete ji pro $x = 1, y = 1$.

a) $F(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{4y}$

b) $F(x, y) = 2 - e^{x} - e^{y}$

c) $F(x, y) = \sqrt{2x} \cdot \sqrt{y + 1}$

d) $F(x, y) = \ln(1 + 2x) + \ln(y + 1)$