VOLBA A PROJEVENÉ PREFERENCE – řešené příklady

Volba

1. Spotřebitel může nakupovat pouze dva statky: statek 1 a 2. Má užitkovou funkci $u(x_1, x_2) = x_1x_2$, kde x_1 a x_2 jsou množství statků 1 a 2. Cena statku 1 je $p_1 = 6$ a cena statku 2 je $p_2 = 1$. Příjem spotřebitele je $m = 60$. Jaký je jeho optimální spotřební koš? Jakou část svého příjmu bude utrácet na jednotlivé statky?

   Řešení

   Spotřebitel si ze své rozpočtové množiny vybírá spotřební koš s maximálním užitkem. Řešíme tedy následující úlohu:

   $$\max_{x_1,x_2} u(x_1, x_2) = x_1x_2$$
   $$\text{při omezení} \quad p_1x_1 + p_2x_2 \le m.$$

   Protože jsou Cobb-Douglasovy preference monotónní (a spojité), spotřebitel si zvolí koš ležící na linii rozpočtu. Řešíme tedy optimalizační úlohu

   $$\max_{x_1,x_2} u(x_1, x_2) = x_1x_2$$
   $$\text{při omezení} \quad p_1x_1 + p_2x_2 = m.$$

   Dále lze postupovat několika způsoby. Ukážeme si dvě možná řešení tohoto problému.

   Řešení 1

   Z linie rozpočtu si můžeme vyjádřit např. množství statku 2

   $$x_2 = \frac{m - p_1x_1}{p_2}. \qquad (1)$$

   Dosazením zpět do užitkové funkce získáme neomezenou optimalizační úlohu s jednou neznámou

   $$\max_{x_1} v(x_1) = x_1\frac{m - p_1x_1}{p_2}.$$

   Po dosazení získáme

   $$\max_{x_1} v(x_1) = x_1(60 - 6x_1) = 60x_1 - 6x_1^2.$$

   Množství statku 1 x_1^*, pro které má tato funkce extrém, najdeme tak, že položíme první derivaci rovnou nule:

   $$\frac{dv(x_1)}{dx_1} = 60 - 12x_1^* = 0$$
   $$x_1^* = 5.$$

   Nyní si ověříme, zda je tento extrém maximum nebo minimum pomocí druhé derivace:

   $$\frac{d^2v(x_1)}{dx_1^2} = -12.$$

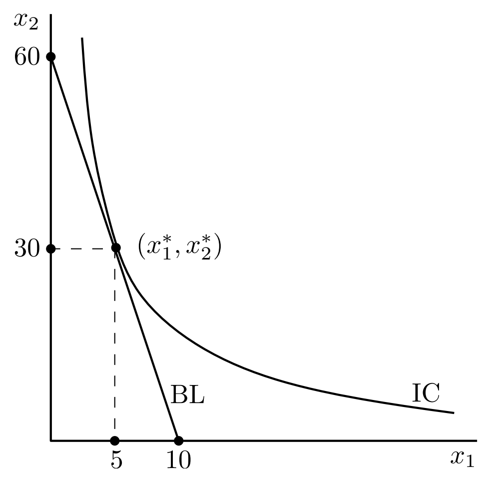
   Protože $-12 < 0$, tato funkce je konkávní. Spotřebitel při množství $x_1^* = 5$ maximalizuje užitek. Dosazením do vztahu (1) získáme optimální množství statku 2

   $$x_2^* = \frac{m - p_1x_1^*}{p_2} = 30.$$

   Optimální spotřební koš je $(x_1^*, x_2^*) = (5, 30)$.

   Spotřebitel bude utrácet za oba statky stejnou částku $p_1x_1 = p_2x_2 = 30$. Tento výsledek nastane u Cobb-Douglasovy užitkové funkce vždy, když jsou u x_1 a x_2 stejné exponenty.

   Následující obrázek ukazuje linii rozpočtu BL, indiferenční křivku IC a optimální spotřební koš (x_1^*, x_2^*).



   Řešení 2

   Úlohu můžeme řešit i jiným způsobem. Vzhledem k tomu, že jsou indiferenční křivky u Cobb-Douglasových preferencí jsou hladké, monotónní, konvexní a neprotínají osy (tzn. spotřebitel bude v optimu nakupovat kladná množství obou statků = vnitřní řešení), indiferenční křivka se bude v optimu dotýkat linie rozpočtu. V bodě dotyku se sklon indiferenční křivky MRS bude rovnat sklonu linie rozpočtu $-p_1/p_2$. Optimální spotřební koš (x_1^*, x_2^*) je tedy řešením následujících dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\text{MRS} = -\frac{p_1}{p_2}$$

$$m = p_1 x_1 + p_2 x_2.$$

Z první rovnice si můžeme vypočítat poměr, ve kterém budou oba statky v optimu spotřebovávány, tedy

$$\text{MRS} = -\frac{p_1}{p_2}$$

$$-\frac{\partial u(x_1,x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1,x_2)/\partial x_2} = -\frac{p_1}{p_2}$$

$$-\frac{x_2^*}{x_1^*} = -6$$

$$x_2^* = 6x_1^*. \qquad (2)$$

Tento poměr můžeme dosadit do linie rozpočtu

$$m = p_1 x_1^* + p_2 x_2^*$$

$$60 = 6x_1^* + 6x_1^*$$

$$x_1^* = 5.$$

Dosazením do vztahu (2) získáme optimální spotřebu statku 2

$$x_2^* = 6x_1^* = 30.$$

Optimální spotřební koš je $(x_1^*, x_2^*) = (5, 30)$. Všimněte si, že spotřebitel utrácí na oba statky stejnou částku (viz Řešení 1).

2. Spotřebitel může nakupovat pouze dva statky: statek 1 a 2. Cena statku 1 je $p_1 = 1$ a cena statku 2 je $p_2 = 3$. Příjem spotřebitele je $m = 35$.
   (a) Jaký bude optimální spotřební koš tohoto spotřebitele, pokud má jeho užitková funkce tvar $u(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$.
   (b) Jaký bude optimální spotřební koš tohoto spotřebitele, pokud má jeho užitková funkce tvar $u(x_1, x_2) = \min\{2x_1, x_2\}$.

Řešení

(a) Statky 1 a 2 jsou dokonalé substituty. Mezní míra substituce tohoto spotřebitele nezávisí na spotřebě:

$$\text{MRS} = -\frac{\partial u(x_1,x_2)/\partial x_1}{\partial u(x_1,x_2)/\partial x_2} = -\frac{1}{2}.$$

Pokud by se sklon linie rozpočtu přesně rovnal mezní míře substituce, budou pro tohoto spotřebitele optimální všechny spotřební koše na jeho linii rozpočtu. Pakliže má jeho linie rozpočtu jiný sklon, bude spotřebovávat pouze jeden statek (rohové řešení). Sklon linie rozpočtu se rovná

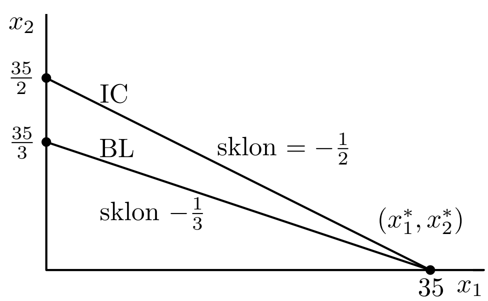
$$-\frac{p_1}{p_2} = -\frac{1}{3}.$$

Spotřebitel je ochotný vyměnit 1/2 jednotky statku 2 za jednu jednotku statku 1. Jeho náklady příležitosti spotřeby jedné jednotky statku 1 jsou pouze 1/3 jednotky statku 2. Spotřebitel bude utrácet celý příjem za statek 1, jeho poptávka je

$$x_1^* = \frac{m}{p_1} = 35.$$

Optimální spotřební koš je $(x_1^*, x_2^*) = (35, 0)$.

Následující obrázek znázorňuje optimální spotřební koš (x_1^*, x_2^*), sklony linie rozpočtu BL a indiferenční křivky IC.



(b) Statky 1 a 2 jsou dokonalé komplementy. Spotřebitel preferuje spotřebu ve fixních proporcích – s každou jednotkou statku 1 spotřebovává 2 jednotky statku 2. Pokud jsou ceny obou statků kladné, spotřebitel bude poptávat oba statky v tomto poměru, tedy

$$2x_1^* = x_2^*. \qquad (3)$$

Spotřebitel si volí koš na své linii rozpočtu

$$p_1x_1^* + p_2x_2^* = m.$$

Substitucí ze vztahu (3) získáme

$$p_1x_1^* + p_2 2x_1^* = m$$

$$x_1^* + 6x_1^* = 35$$

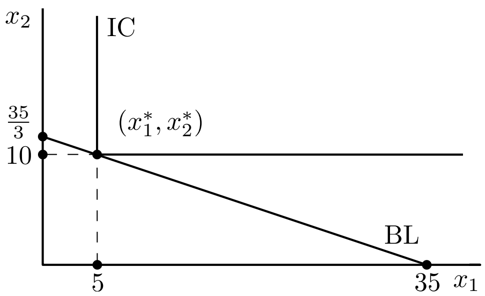
$$x_1^* = 5.$$

Poptávané množství statku 2 získáme ze vztahu (3):

$$x_2^* = 2x_1^* = 10.$$

Optimální spotřební koš je $(x_1^*, x_2^*) = (5, 10)$.

Následující obrázek ukazuje linii rozpočtu BL, indiferenční křivku pro dokonalé komplementy IC a optimální spotřební koš (x_1^*, x_2^*).



Projevené preference

3. Spotřebitel může nakupovat pouze dva statky: statek 1 a 2. Pokud jsou ceny $(p_1, p_2) = (2, 5)$, volí si spotřební koš $(x_1, x_2) = (5, 4)$. Pokud jsou ceny $(q_1, q_2) = (6, 1)$, vybírá si spotřební koš $(y_1, y_2) = (4, 4)$. Pokud jsou ceny $(r_1, r_2) = (1, 4)$, volí si spotřební koš $(z_1, z_2) = (3, 5)$.

   (a) Je chování spotřebitele konzistentní se slabým axiomem projevených preferencí?

   (b) Je konzistentní se silným axiomem projevených preferencí?

   Řešení

   (a) Chování spotřebitele je konzistentní se slabým axiomem projevených preferencí, pokud pro každou dvojici spotřebních košů platí, že pokud je při daných cenách jeden koš přímo projevený jako preferovaný před druhým košem, není při jiných cenách naopak druhý koš přímo projevený jako preferovaný před prvním košem.

Koš 1 je přímo projevený jako preferovaný před košem 2, pokud je při daných cenách spotřebitelem vybrán, přestože si mohl dovolit i koš 2, tedy přestože byly výdaje na koš 2 menší nebo rovny výdajům na koš 1.

Např. pokud byl při cenách (p_1, p_2) vybrán koš (x_1, x_2) a koš (y_1, y_2) byl dosažitelný, tedy $p_1x_1 + p_2x_2 \geq p_1y_1 + p_2y_2$, pak, aby platil slabý axiom projevených preferencí, nesmí např. při cenách (q_1, q_2) být vybrán koš (y_1, y_2) a koš (x_1, x_2) být dosažitelný, tedy nesmí platit, že $q_1x_1 + q_2x_2 \leq q_1y_1 + q_2y_2$.

Nejpřehlednější způsob, jak zjistit, zda není porušen slabý axiom projevených preferencí pro žádnou dvojici spotřebních košů a žádnou dvojici cen, je zapsat si výdaje na všechny spotřební koše pro všechny ceny do následující tabulky:

	(x_1, x_2)	(y_1, y_2)	(z_1, z_2)
(p_1, p_2)	*30*	28^*	31
(q_1, q_2)	34	*28*	23^*
(r_1, r_2)	21^*	20^*	*23*

Do políček dopíšeme výdaje na jednotlivé spotřební koše. Např. políčko vlevo nahoře obsahuje výdaje na spotřební koš (x_1, x_2) při cenách (p_1, p_2), tedy $p_1x_1 + p_2x_2 = 2 \times 5 + 5 \times 4 = 30$.

Hvězdičky doplníme do polí, které mají stejnou nebo nižší hodnotu než pole na stejném řádku odpovídají zvolenému spotřebnímu koši (výdaje na zvolené koše jsou napsány *italikou*). Tím vyznačíme spotřební koše, které jsou při daných cenách pro spotřebitele horší než zvolené spotřební koše. Např. hvězdička v prvním řádku ukazuje, že je při cenách (p_1, p_2) zvolený koš (x_1, x_2) přímo projevený jako preferovaný před košem (y_1, y_2). Spotřebitel si vybral koš (x_1, x_2), který ho stál 30, přestože si mohl koupit i koš (y_1, y_2), který by ho stál 28. Proto v tomto případě spotřebitel přímo projevil svoji preferenci pro koš (x_1, x_2). Naopak nemůžeme říci, zda spotřebitel preferuje koš (x_1, x_2) před košem (z_1, z_2), protože koš (z_1, z_2) stojí 31. Spotřebitel si ho v okamžiku volby nemohl dovolit. Jeho volba koše (x_1, x_2) tedy nevypovídá nic o jeho preferencích vůči koši (z_1, z_2).

Celkově o preferencích spotřebitele víme, že

i. při cenách (p_1, p_2) byl koš (x_1, x_2) přímo projevený jako preferovaný před košem (y_1, y_2),

ii. při cenách (q_1, q_2) byl koš (y_1, y_2) přímo projevený jako preferovaný před košem (z_1, z_2),

iii. při cenách (r_1, r_2) byl koš (z_1, z_2) přímo projevený jako preferovaný před košem (y_1, y_2) a při cenách (r_1, r_2) byl koš (z_1, z_2) přímo projevený jako preferovaný před košem (x_1, x_2).

Chování spotřebitele porušuje slabý axiom projevených preferencí, protože je při cenách (q_1, q_2) koš (y_1, y_2) preferovaný před koše (z_1, z_2) a při cenách (r_1, r_2) naopak koš (z_1, z_2) preferovaný před košem (y_1, y_2) (viz body ii. a iii. a podtržená čísla v tabulce).

(b) Pokud je porušen slabý axiom projevených preferencí, víme, že je porušen i silný axiom projevených preferencí. Přesto si zde ukážeme, jak testujeme konzistenci chování spotřebitele se silným axiomem projevených preferencí.

Chování spotřebitele je konzistentní se silným axiomem projevených preferencí, pokud pro každou dvojici spotřebních košů platí, že pokud je při daných cenách jeden koš přímo nebo *nepřímo* projevený jako preferovaný před druhým košem, není při jiných cenách naopak druhý koš přímo nebo *nepřímo* projevený jako preferovaný před prvním košem. Oproti slabému axiomu projevených preferencí tedy uvažujeme i nepřímo projevené preference.

Nejjednodušší případ nepřímo projevených preferencí má následující strukturu. Předpokládejme, že při daných cenách není koš 1 přímo projevený jako preferovaný před košem 3. Pokud je však při těchto cenách koš 1 přímo projevený jako preferovaný před košem 2 a při jiných cenách je koš 2 je přímo projevený jako preferovaný před košem 3, potom z tranzitivity vyplývá, že koš 1 je nepřímo preferovaný před košem 3. V tomto případě jsme odvodili nepřímo projevené preference ze dvou přímo projevených preferencí. Řetěz přímo projevených preferencí může být libovolně dlouhý. Např. koš 1 bude nepřímo projevený před košem 3, pokud $1 \succ 2$, $2 \succ 4$, $4 \succ 5$ a $5 \succ 3$ ($\succ$ zde znamená přímo projevený jako preferovaný)

Silný axiom projevených preferencí můžeme zkontrolovat pomocí následující tabulky:

	(x_1, x_2)	(y_1, y_2)	(z_1, z_2)
(p_1, p_2)	*30*	28^*	$\mathbf{31}^{(*)}$
(q_1, q_2)	34	*28*	$\underline{23}^*$
(r_1, r_2)	$\mathbf{21}^*$	$\underline{20}^*$	*23*

Oproti tabulce v bodě (a) jsou zde navíc vyznačeny nepřímo projevené preference (viz značka $^{(*)}$). Konkrétně vidíme, že koš (x_1, x_2) je nepřímo projevený jako preferovaný před košem (z_1, z_2), protože při cenách (p_1, p_2) je koš (x_1, x_2) přímo projevený jako preferovaný před košem (y_1, y_2) a při cenách (q_1, q_2) je koš (y_1, y_2) přímo projevený jako preferovaný před košem (z_1, z_2).

Chování spotřebitele porušuje silný axiom projevených preferencí, protože

i. při cenách (q_1, q_2) byl koš (y_1, y_2) přímo projevený jako preferovaný před košem (z_1, z_2) a zároveň při cenách (r_1, r_2) byl koš (z_1, z_2) přímo projevený jako preferovaný před košem (y_1, y_2) (viz podtržená čísla v tabulce),

ii. a protože koš (x_1, x_2) je nepřímo projevený jako preferovaný před košem (z_1, z_2) a zároveň při cenách (r_1, r_2) byl koš (z_1, z_2) přímo projevený jako preferovaný před košem (x_1, x_2) (viz tučná čísla v tabulce).