Logika

Mějme vektory:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

```
v1 <- c(1,2,3); v2 <- c(3,2,1); v3 <- c(10,10,10); v4 <- c("a","b","c");
v5 <- c(1,10)
```

- Rozhodněte, které prvky vektoru v_1 jsou větší než prvky vektorů v_2 a v_3.
  ```
  v1 > v2; v1 > v3
  ```
- Rozhodněte, zda-li všechny prvky vektoru v_3 jsou aspoň tak veliké, jako prvky v_2.
  ```
  all(v3 >= v2)
  ```
- Rozhodněte, zda alespoň jeden prvek vektoru v_3 je větší než 2.
  ```
  any(v3 > 2)
  ```
- V Rstudiu vyzkoušejte porovnat libovolné vektory.
  ```
  all(v4 != v3)
  all(v4 > v3)
  all(v4 = v3)
  v4 < v5
  any(v1 < v2) & all(v2 < v3)
  if (any(v1 > v3) | all(v2 > 1)) print("ahoj") else print("Cau")
  ```

Matice

- Mějme $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Spočtěte BA, A^2, B^T. Dále určete hodnost matice A a určete její determinant.

```
A <- matrix(c(1, 0, 2, 2, -1, 0, 0, 1, -1), 3)
B <- matrix(c(0, -2, 1, 0, 1, 1), 2)
B %*% A
A %*% A
t(B)
qr(A)$rank
det(A)
```

- Mějme $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. Pomocí Laplaceova rozvoje určete $|A|$.

```
A <- matrix(c(2, 1, 4, 8, 1, -1, 2, 1, -2, -1, 2, 1, -1, 1, 1, 2), 4)
```

- Mějme $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$. Určete A^{-1}.

```
A <- matrix(c(1, 6, 13, 1, 5, 10, 1, 4, 8), 3)
B <- solve(A)
A %*% B
C <- round(solve(A))
A %*% C
C %*% A
```

Systém lineárních rovnic

- Vyřešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5, \\ y - 3z &= 5, \\ 3x - z &= 4. \end{aligned}$$

```
(A <- matrix(c(1,0,3,2,1,0,0,-3,-1),3)); (b <- c(5,5,4))
x <- solve(A,b)
A %*% x
all(A %*% x == b)
```

- Vyřešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0, \\ x + 2y - 2z &= 0, \\ 3x + y - z &= 0. \end{aligned}$$

```
(A <- matrix(c(2,1,3,-1,2,1,1,-2,-1),3)); (b <- c(0,0,0))
(x <- solve(A,b))
det(A)
install.packages("pracma")
library(pracma)
rref(cbind(A, b))
```

- Vyřešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2a + b - c + d &= 1, \\ 3a - 2b + 2c - 3d &= 2, \\ 2a - b + c - 3d &= 4, \\ 5a + b - c + 2d &= -1. \end{aligned}$$

```
(A <- matrix(c(2,3,2,5,1,-2,-1,1,-1,2,1,-1,1,-3,-3,2),4)); (b <- c(1,2,4,-1))
(x <- solve(A,b))
det(A)
rref(cbind(A,b))
```

Vlastní čísla a vlastní vektory

- Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

```
A <- matrix(c(2, 1, 2, -3, -2, 0, 1, 1, -1), 3)
eigen(A)
```

Funkce a definiční obor

- Zakreslete funkci $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \dots\ x < 0 \\ x - 1 & \dots\ 0 \le x < 1 \\ \ln x & \dots\ x \ge 1 \end{cases}$
- Určete definiční obor funkce $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x-1)}}{x-2}$.
- Určete definiční obor funkce $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x-2}}{\ln x}$.

Limita funkce

```
install.packages("caracas")
library(caracas)
caracas::install_sympy()
x <- symbol("x")
```

- Spočtěte $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2+2}$.

  ```
  lim(sqrt(x-1)/(x^2+2), x, 1)
  ```

- Spočtěte $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+|x|}{x}$.
- Spočtěte $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^3-27}$.

  ```
  lim((x^2-3*x)/(x^3-27), x, 3)
  ```

- Spočtěte $\lim_{x\to 3} \frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6}$.

```
lim(1/(x-3)-5/(x^2-x-6), x, 3)
```

- Spočtěte $\lim_{x\to -1} \frac{4-\sqrt{x+17}}{2x+2}$.

```
lim((4-sqrt(x+17))/(2*x+2), x, -1)
```

- Spočtěte $\lim_{a\to 2} \frac{1}{3} - \frac{2}{3a}\frac{1}{a-2}$.
- Spočtěte $\lim_{t\to 3} \sqrt{\frac{32t-96}{t^2-2t-3}}$.

```
lim(sqrt((32*x-96)/(x^2-2*x-3)), x, 3)
```

- Spočtěte $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x-1}$

```
lim(1/sin(x) - 1/(exp(x)-1), x, 0, dir = "+")
```

L'Hospitalovo pravidlo

- Spočtěte $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$.

```
lim((1-cos(x))/(x*sin(x)), x, 0)
```

- Spočtěte $\lim_{x\to\pi/2}(1-\sin x)\tan x$.

```
lim((1-sin(x))*tan(x), x, pi/2)
```

- Spočtěte $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

```
lim(x*log(x), x, 0, dir = "+")
```

Tečna funkce

- Nalezněte tečnu funkce $y = \ln(2x-1)$ v bodě $T = [1, ?]$.

```
f=expression(log(2*x-1))
slope<-eval(D(f,"x"),x<- 1) #prvni derivace v zadanem bode
y0<-eval(f,x<- 1) #y-souradnice bodu dotyku
yint <- y0 - slope #prusecik s y
plot(function(x) log(2*x-1), xlim = c(0,10))
curve(yint + slope*x, add=T, col = 4, lwd=2)
points(1,y0, pch=19, col = 2)
```

Lokální extrémy funkce

- Nalezněte lokální extrémy funkce $y = x - \sqrt{x-1}$.

```
plot(function(x) x-sqrt(x-1), xlim = c(1,3))
xyr<-expression(x-sqrt(x-1))
D1 <- D(xyr, "x")
f = function(x) eval(D1)
uniroot(f,c(1,2))
```

Asymptoty funkce

- Nalezněte asymptoty k funkci $y = \frac{2x}{1-3x}$.
- Nalezněte asymptoty k funkci $y = \frac{x+\ln x}{x}$.
- Vyšetřete funkci $y = x \cdot \operatorname{arccot}(x)$.

Globální extrémy funkce

- Nalezněte globální extrémy funkce $y = x^2 - 2x + 2$ na množině $(0, 2>$.

```
plot(function(x) x^2-2*x+2, xlim = c(0,2))
```

Průběh funkce

- Vyšetřete funkci $y = \frac{|x-1|}{x+2}$.

  ```
  plot(function(x) abs(x-1)/(x+2), xlim = c(-10,20))
  ```

- Vyšetřete funkci $y = (1-x^2)^2$.

  ```
  plot(function(x) (1-x^2)^2, xlim = c(-2,2))
  ```

- Vyšetřete funkci $y = x^2 e^{-x}$.

  ```
  plot(function(x) x^2*exp(-x), xlim = c(-1,4))
  ```

Taylorův polynom

- Určete Taylorovu řadu k funkci $f(x) = \sin x$ se středem $x_0 = 0$.

  ```
  library(pracma)
  f <- function(x) sin(x)
  p <- taylor(f, 0, 6)
  ```

- Pomocí Taylorova polynomu pro $n = 3$ určete přibližně $\sqrt[3]{30}$.

```
f <- function(x) x^(1/3)
p <- taylor(f, 27, 3) # zkusit si ruzne stredy
polyval(p, 30)
```

Funkce více proměnných

- Znázorněte definiční obor funkce $z = \sqrt{(1 - \ln y)(\ln(-x))}$.
- Vypočtěte všechny parciální derivace až do řádu dva $z = (x + y)e^{-x}$.

```
install.packages("mosaicCalc")
library(mosaicCalc)
D((x+y)*exp(-x)~x)
D((x+y)*exp(-x)~y)
D((x+y)*exp(-x)~x&x)
D((x+y)*exp(-x)~x&y)
D((x+y)*exp(-x)~y&x)
D((x+y)*exp(-x)~y&y)
```

- Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = (x + y^2)e^{x/2}$.

```
install.packages("plot3D")
library(plot3D)
X <- seq(-10, 10, length.out=20)
Y <- seq(-10, 10, length.out=20)
M <- mesh(X,Y)
x <- M$x
y <- M$y
z = (x+y^2)*exp(x/2)
perspbox(x,y,z, bty="b2", ticktype="detailed", d=2, main="funkce z")
persp3D(x,y,z,add=T)
```

- Vyšetřete lokální extrémy funkce $f(x, y) = (x^2 - 1)(1 - x^4 - y^2)$.

```
X <- seq(-2,2,length.out = 100)
Y <- seq(-2,2,length.out = 100)
M <- mesh(X,Y)
x <- M$x
y <- M$y
z = (x^2-1)*(1-x^4-y^2)
perspbox(x,y,z, bty = "b2", ticktype = "detailed", d = 2, main = "funkce z")
surf3D(x,y,z,add = T)
```

Neurčitý integrál

- $\int (x - 1)^2 \sqrt{x}\, dx$

```
library(mosaicCalc)
G = antiD((x-1)^2/sqrt(x) ~ x)
G = antiD((x-1)^2*x^-0.5 ~ x)
```

- $\int \tan(2x)\, dx$
- $\int \frac{\sin(x)}{7+\cos(x)}\, dx$
- $\int \frac{x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\, dx$
- $\int xe^{x^2}\, dx$
- $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$
- $\int \ln(x)\, dx$
- $\int x^2e^{x+1}\, dx$
- $\int \sin(x)\cos(x)\, dx$

Určitý integrál

- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx$

```
f <- function(x) cos(x)
integrate(f, 0, pi/2)
```

- $\int_0^1 \frac{1+e^x}{e^x}\, dx$

```
f <- function(x) (1 + exp(x)) / exp(x)
integrate(f, 0, 1)
```

- $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$

```
f <- function(x) x * sqrt(4 - x^2)
integrate(f, 0, 2)
```

- Compute the area bounded by $y = x^2 - 4x + 6$ and $-2x^2 + 8x - 3$.

```
f1 <- function(x) x^2 - 4*x + 6
f2 <- function(x) -2*x^2 + 8*x - 3
a <- uniroot(function(x) f1(x) - f2(x), c(0.9, 1.5))
b <- uniroot(function(x) f1(x) - f2(x), c(1.5, 5))
F1 <- integrate(f1, a$root, b$root)
F2 <- integrate(f2, a$root, b$root)
F2$value - F1$value
```

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4+x^2}\, dx$

```
f <- function(x) 1 / (x^2 + x^4)
integrate(f, 1, Inf)
```

- $\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx$

```
f <- function(x) atan(x) / (1 + x^2)
integrate(f, 1, Inf)
```

- $\int_0^2 \frac{1}{x}\,dx$

```
f <- function(x) 1 / x
integrate(f, 0, 2)
integrate(f, 0, 2, rel.tol = .Machine$double.eps^0.056)
```

- $\int_{-1}^1 \ln(|x|)\,dx$

```
f <- function(x) log(abs(x))
integrate(f, 0, 1)$value + integrate(f, -1, 0)$value
```