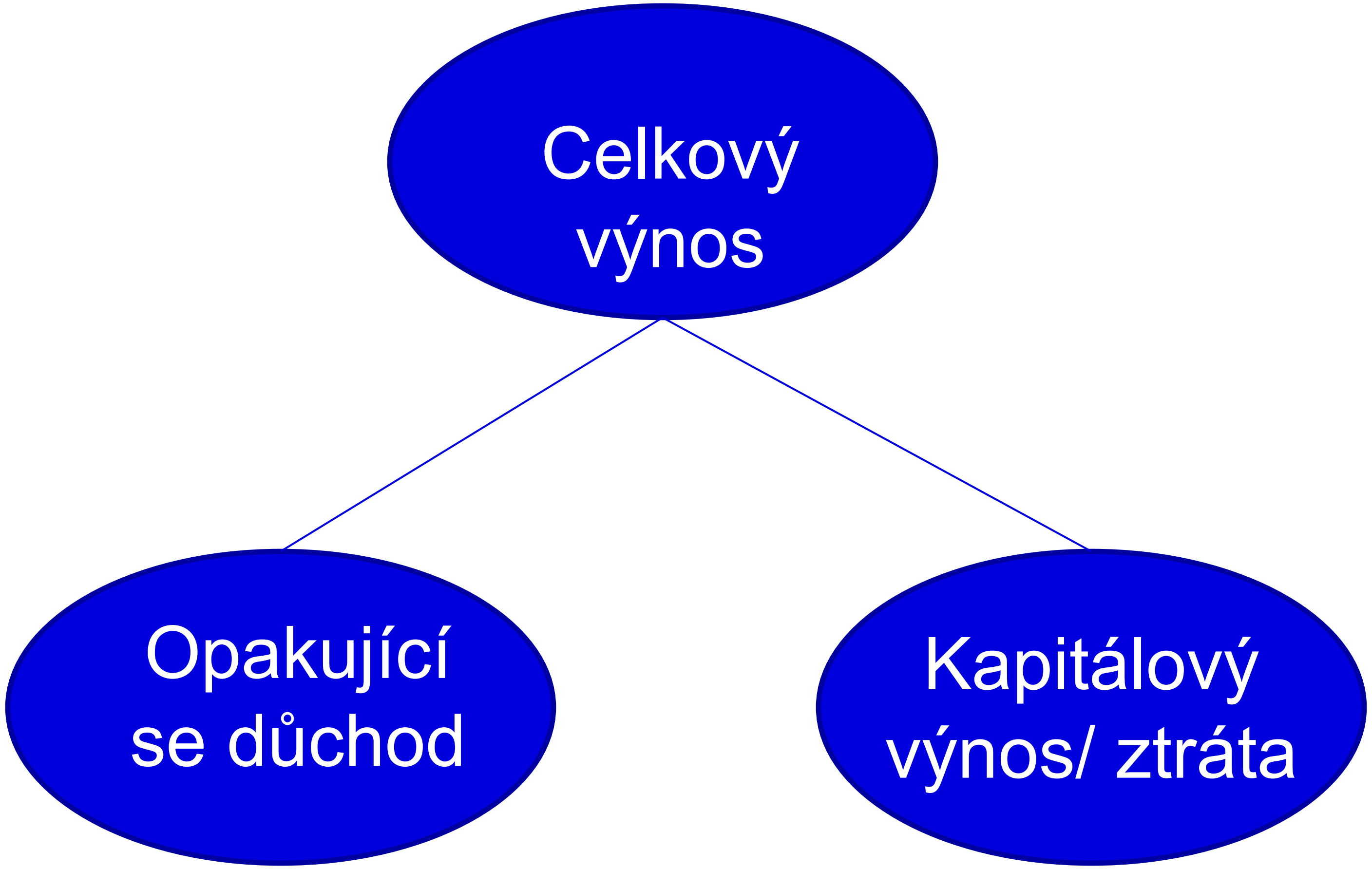
Výnos a riziko portfolia: Teorie portfolia

Výnosnost finančního aktiva



Výnos za dobu držby aktiva

– Výnos za období držby je výnos z držení aktiva po stanovené časové období.

$$R = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} + \frac{D_t}{P_{t-1}}$$

$$= \text{Capital gain} + \text{Dividend yield}$$

$$R = \frac{105 - 100}{100} + \frac{2}{100} = 5\% + 2\% = 7\%$$

Výnos za dobu držby aktiva

- Jaký je výnos za 3 roky držení, pokud jsou roční výnosy z držení aktiva 7 %, 9 % a –5 %?

$$R = \left[\left(1+R_1\right)\times\left(1+R_2\right)\times\left(1+R_3\right)\right]-1$$
$$= \left[\left(1+.07\right)(1+.09)(1+-.05)\right]-1 \approx .1080 = 10.80\%$$
$$annualR = 0{,}03477 = 3{,}477\%$$

MUNI ECON

Typy průměrného výnosu

Průměrný výnos

- Aritmetický průměr
- Geometrický průměr
- Vážený průměr

Aritmetický průměr

– Aritmetický nebo střední míra výnosnosti je prostý průměr všech výnosů za období držení.

$$\overline{R}_i = \frac{R_{i1} + R_{i2} + \cdots + R_{iT-1} + R_{iT}}{T} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{it}$$

$$\overline{R}_i = \frac{-50\% + 35\% + 27\%}{3} = 4\%$$

MUNI ECON

Geometrický průměr

- Geometrický průměr výnosu zohledňuje skládání výnosů prostřednictvím složeného úroku.
- **Pracuje se koeficienty**

$$\overline{R}_{Gi} = \sqrt[T]{(1+R_{i1})\times(1+R_{i2})\times\cdots\times(1+R_{iT-1})\times(1+R_{iT})} - 1$$

$$= \sqrt[T]{\prod_{t=1}^{T}(1+R_{it})} - 1$$

$$R_{Gi} = \sqrt[3]{(1-.50)\times(1+.35)\times(1+.27)} - 1 \approx -5.0\%$$

MUNI
ECON

Vážený průměr

Investment	Value	Rate of Return	Weight	Contribution
Roboto Bond Fund	68,591.35	2.5%	18%	0.458%
Duff Small Cap Fund	24,759.31	7.4%	7%	0.490%
Ziff Value Investor Fund A	85,840.65	4.4%	23%	1.008%
Cogswell International Fund	99,567.56	5.1%	27%	1.356%
Sparkle Growth and Income Fund	95,806.15	10.1%	26%	2.588%
Weighted Average Return	374,565.02	5.9%		5.900%

MUNI ECON

Anualizovaný výnos

$$r_{annual} = \left(1 + r_{period}\right)^{c} - 1$$

c : number of periods in a year

Týdenní výnosnost je 0.20 %:

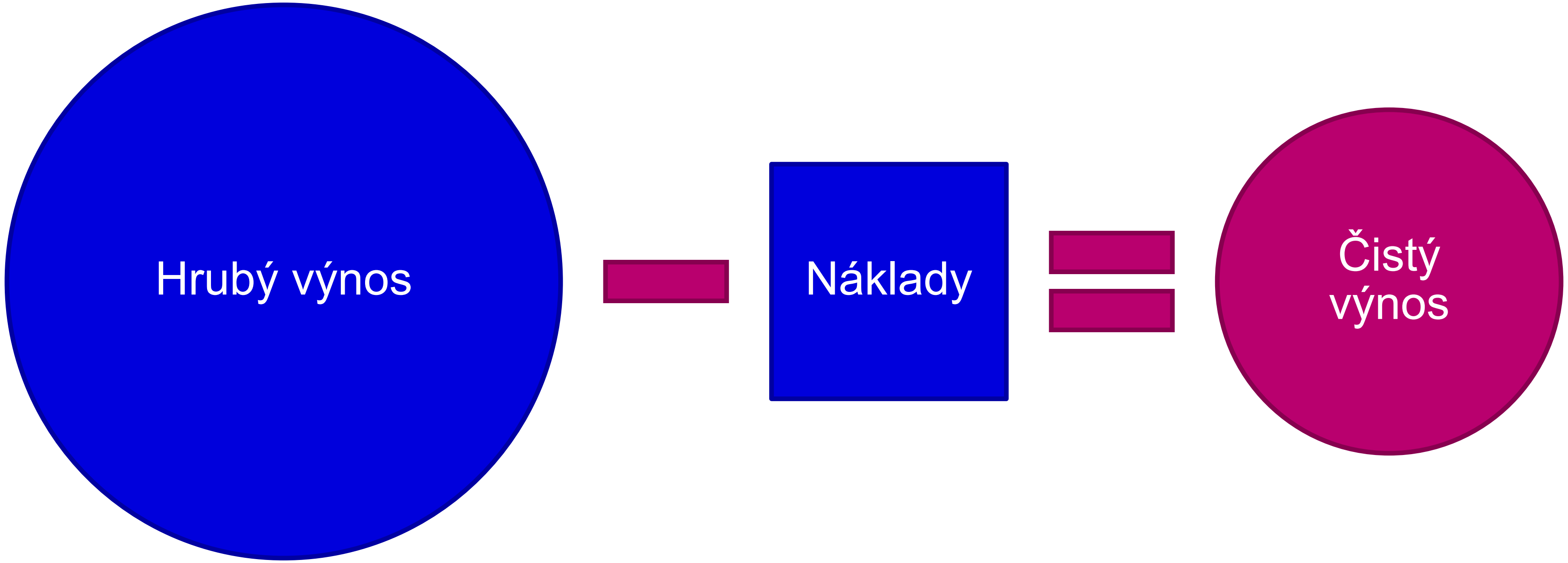
$$r_{annual} = (1 + 0.002)^{52} - 1 = .1095 = 10.95\%$$

Výnosnost za 18 měsíců je 20 %:

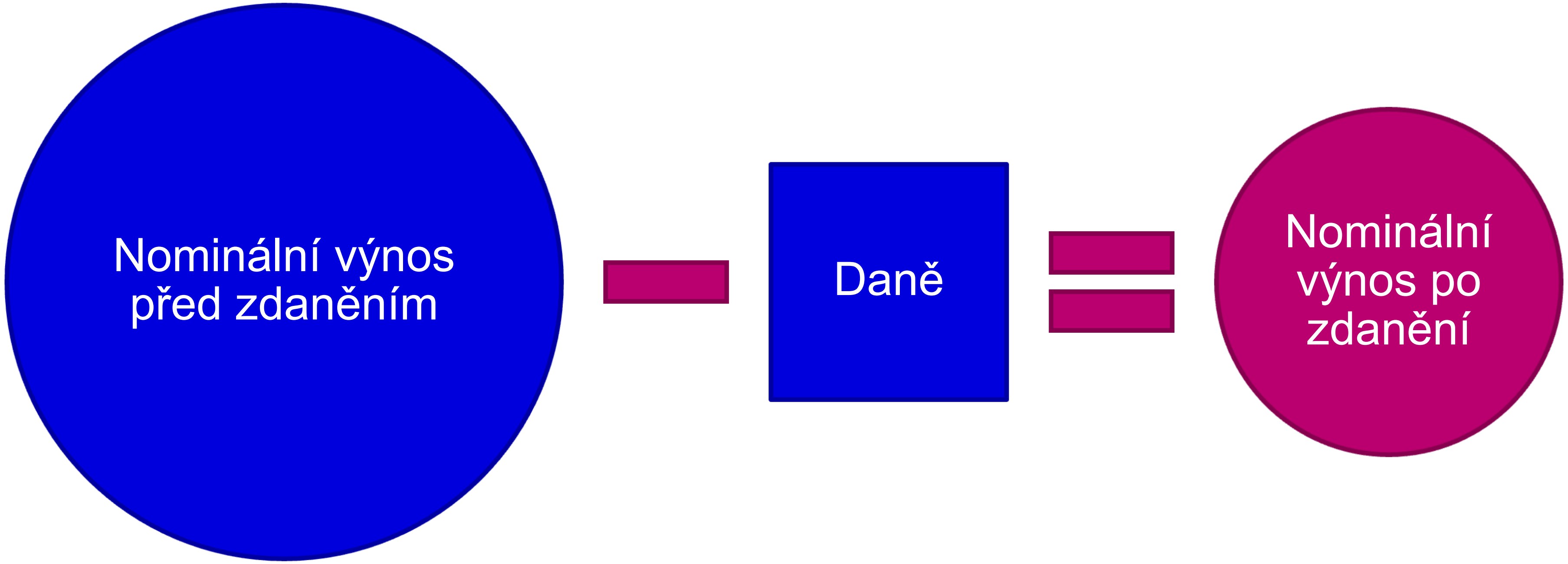
$$r_{annual} = (1 + 0.20)^{2/3} - 1 = 0.1292 = 12.92\%$$

MUNI
ECON

Hrubý a čistý výnos



Nominální výnos před a po zdanění



After Tax rate = Pre Tax rate x (1- Tax rate)

Nominální a reálný výnos

$$(1+r)=(1+r_{rF})\times(1+\pi)\times(1+RP)=(1+0.03)\times(1+0.02)\times(1+0.05)$$

$$r=10.313\%$$

$$(1+r_{real})=(1+r_{rF})\times(1+RP)=(1+0.03)\times(1+0.05)$$

$$r_{real}=8.15\%$$

$$(1+r_{real})=(1+r)\div(1+\pi)=(1+0.10313)\div(1+0.02)$$

$$r_{real}=8.15\%$$

Rozptyl a směrodatná odchylka jediného aktiva

Populace

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_t - \mu)^2}{T}$$

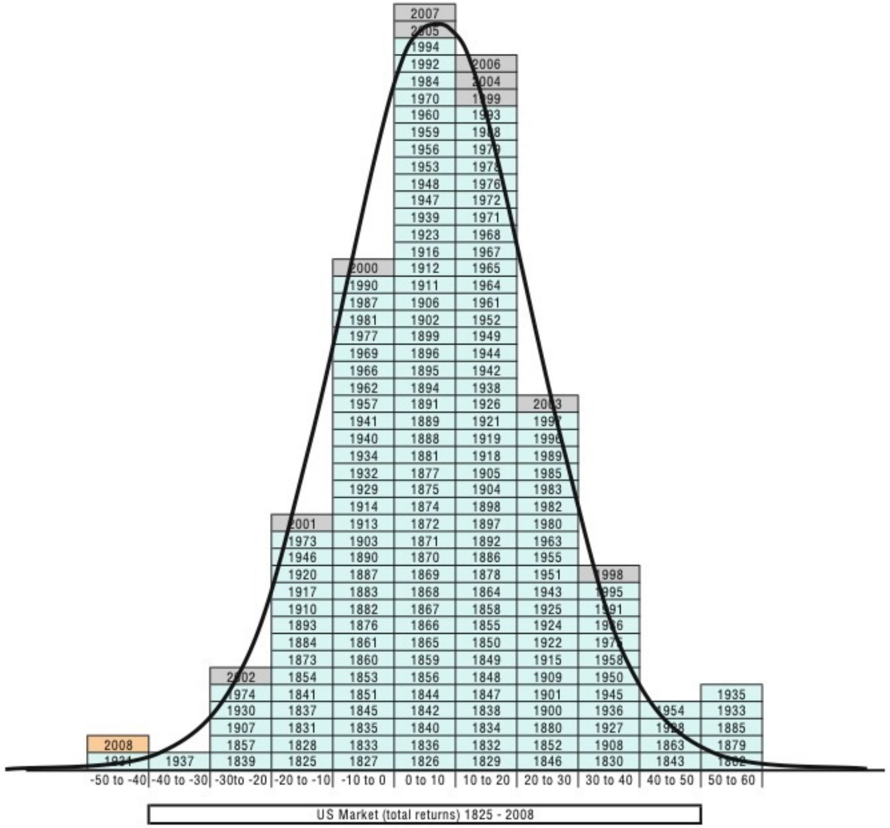
$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Vzorek/
Sample

$$s^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} (R_t - \overline{R})^2}{T-1}$$

$$s = \sqrt{s^2}$$

Distribuce ročních výnosností US trhu



Rozptyl portfolia aktiv

- Rozptyl lze určit pro N cenných papírů v portfoliu pomocí níže uvedených vzorců. Cov(Ri, Rj) je kovariance výnosů mezi cenným papírem *i* a cenným papírem *j* a může být vyjádřena jako součin korelace mezi těmito dvěma výnosy (ρi,j) a standardními odchylkami těchto dvou aktiv, Cov(Ri, Rj) = ρi,j σiσj.

$$\sigma_P^2 = Var(R_P) = Var\left(\sum_{i=1}^{N} w_i R_i\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} w_i w_j Cov(R_i, R_j)$$

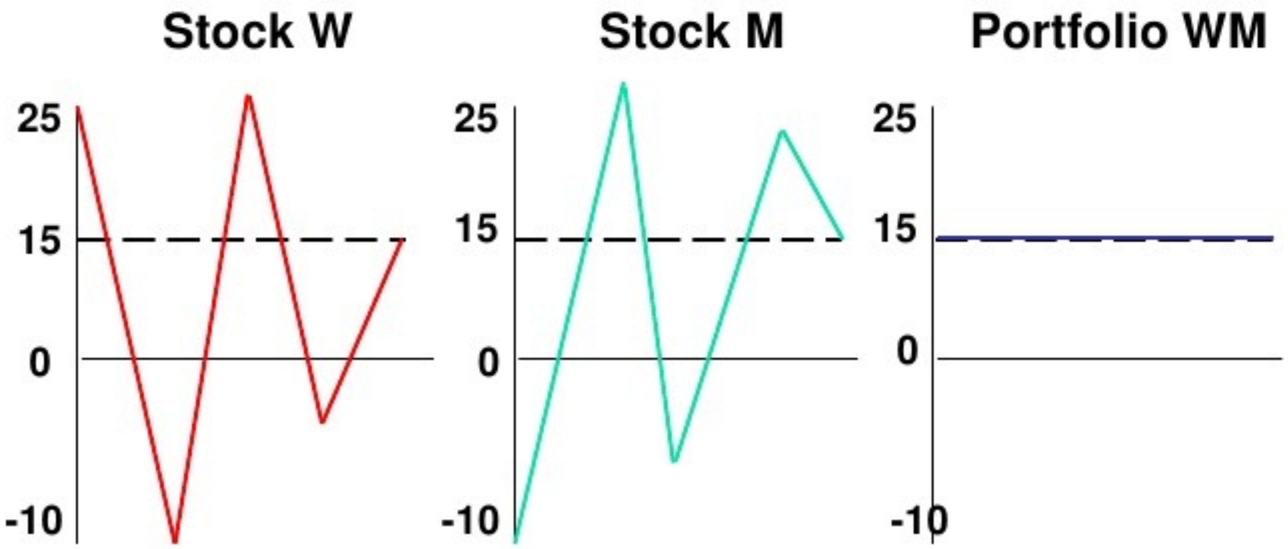
$$= \sum_{i=1}^{N} w_i^2 Var(R_i) + \sum_{i,j=1, i \neq j}^{N} w_i w_j Cov(R_i, R_j)$$

$$cov(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n-1}$$

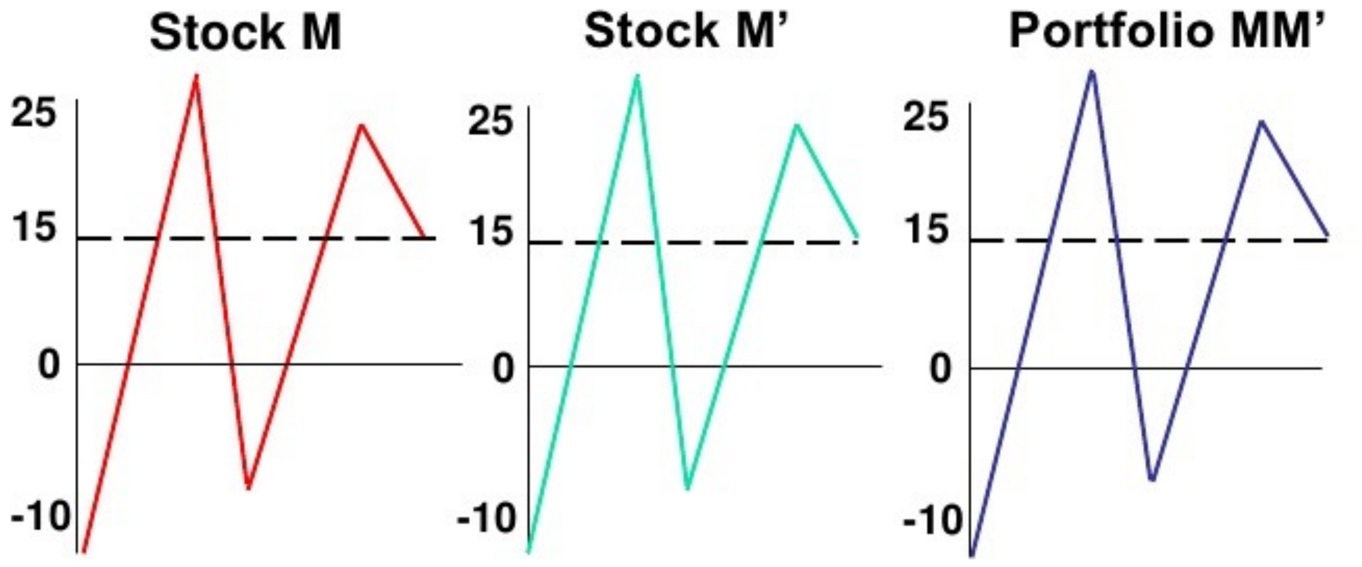
$$\rho_{X,Y} = corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

MUNI ECON

Returns distribution for two perfectly negatively correlated stocks (ρ = -1.0)



Returns distribution for two perfectly positively correlated stocks (ρ = 1.0)



Výnos a riziko portfolio 2 aktiv

– Předpokládejme, že se jako investor z USA rozhodnete držet portfolio s **80 procenty** investovanými do amerického akciového indexu **S&P 500** a zbývajících 20 procent do indexu **MSCI Emerging Markets**. **Očekávaný výnos je 9,93** procent pro **S&P 500** a **18,20 procent** pro index rozvíjejících se trhů **MSCI Emerging Markets**. **Riziko (standardní odchylka) je 16,21** procent pro **S&P 500** a **33,11 procent** pro **MSCI Emerging Markets**. Jaký bude očekávaný výnos a riziko portfolia vzhledem k tomu, že **kovariance** mezi S&P 500 a indexem Emerging Markets je **0,0050**?

MUNI ECON

Výnos a riziko portfolio 2 aktiv

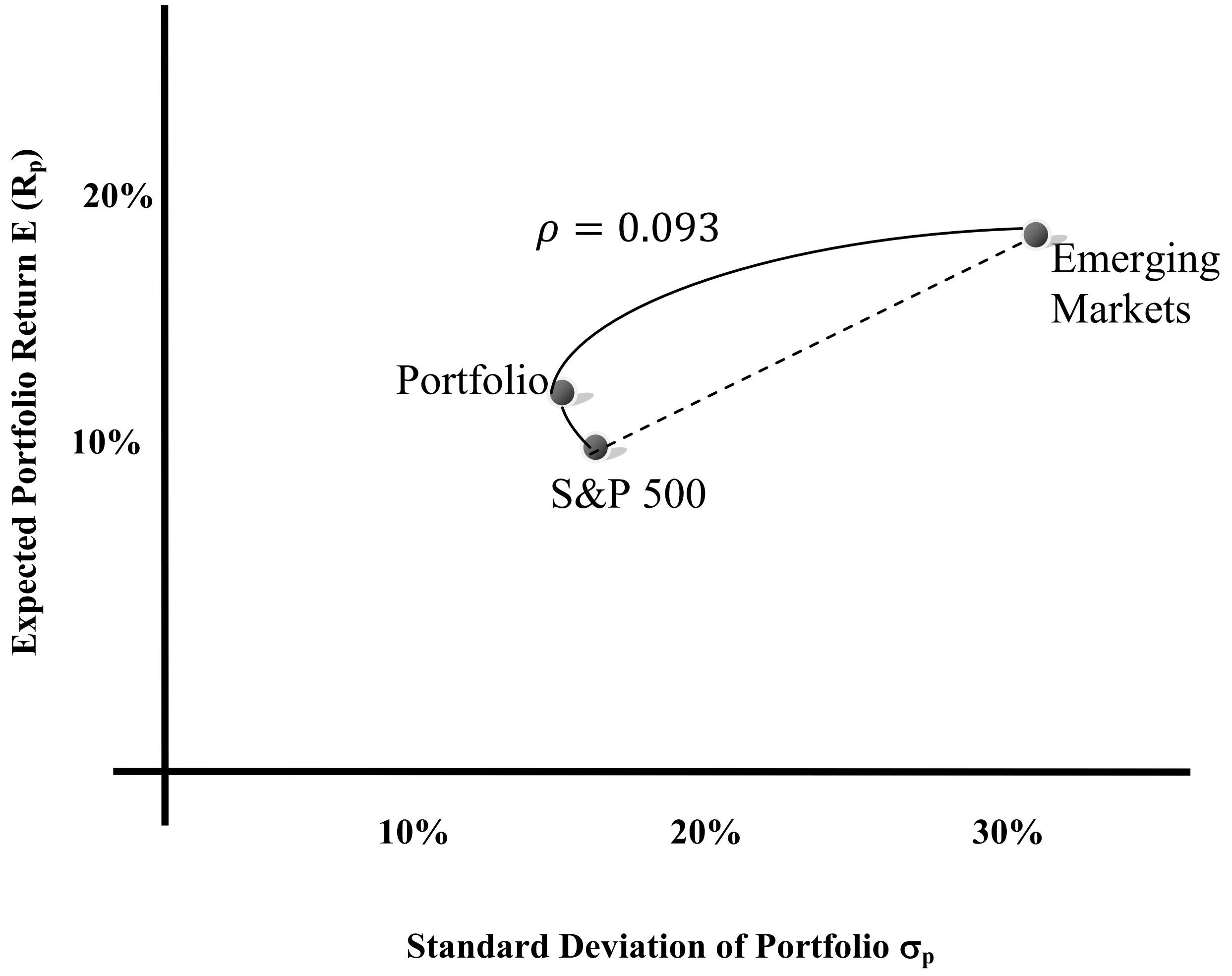
$$R_P = w_1 R_1 + w_2 R_2 = (0.80 \times 0.0993) + (0.20 \times 0.1820)$$
$$= 0.1158 = 11.58\%$$

$$\sigma_P^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 Cov(R_1, R_2)$$
$$= (0.80^2 \times 0.1621^2) + (0.20^2 \times 0.3311^2) + (2 \times 0.80 \times 0.20 \times 0.0050)$$
$$= 0.02281$$

$$\sigma_P = \sqrt{w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2 w_1 w_2 Cov(R_1, R_2)}$$
$$= \sqrt{0.02281} = 0.1510 = 15.10\%$$

MUNI
ECON

Výnos a riziko portfolio 2 aktiv



Riziko a výnos pro jednotlivé třídy aktiv v USA v jednotlivých desetiletí (%)

		1930s	1940s	1950s	1960s	1970s	1980s	1990s	2000s*	1926–2008
Large company stocks	Return	–0.1	9.2	19.4	7.8	5.9	17.6	18.2	–3.6	9.6
	Risk	41.6	17.5	14.1	13.1	17.2	19.4	15.9	15.0	20.6
Small company stocks	Return	1.4	20.7	16.9	15.5	11.5	15.8	15.1	4.1	11.7
	Risk	78.6	34.5	14.4	21.5	30.8	22.5	20.2	24.5	33.0
Long-term corporate bonds	Return	6.9	2.7	1.0	1.7	6.2	13.0	8.4	8.2	5.9
	Risk	5.3	1.8	4.4	4.9	8.7	14.1	6.9	11.3	8.4
Long-term government bonds	Return	4.9	3.2	–0.1	1.4	5.5	12.6	8.8	10.5	5.7
	Risk	5.3	2.8	4.6	6.0	8.7	16.0	8.9	11.7	9.4
Treasury bills	Return	0.6	0.4	1.9	3.9	6.3	8.9	4.9	3.1	3.7
	Risk	0.2	0.1	0.2	0.4	0.6	0.9	0.4	0.5	3.1
Inflation	Return	–2.0	5.4	2.2	2.5	7.4	5.1	2.9	2.5	3.0
	Risk	2.5	3.1	1.2	0.7	1.2	1.3	0.7	1.6	4.2

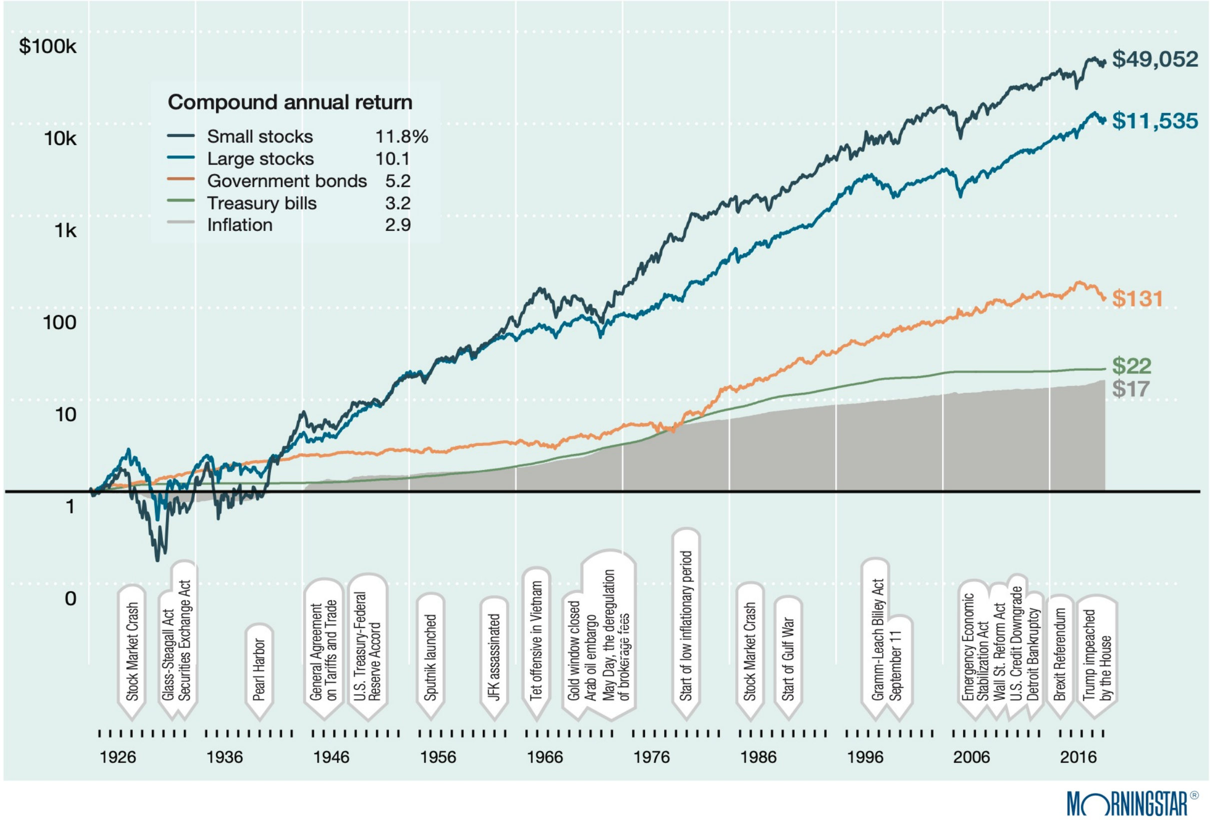
Returns are measured as annualized geometric mean returns.
Risk is measured by annualizing monthly standard deviations.
* Through 31 December 2008.
Source: 2009 Ibbotson SBBI Classic Yearbook (Tables 2-1, 6-1, C-1 to C-7).

Ibbotson® SBBI®

Stocks, Bonds, Bills, and Inflation 1926–2022

Why invest?

If you have financial goals, such as a secure retirement or paying for a college education, investing makes sense. As you can see here in the growth of $1 over the past 97 years, small-cap stocks, large-cap stocks, government bonds, and Treasury bills should all have a place in a properly allocated long-term investment strategy.



Nominální výnosy, reálné výnosy a rizikové prémie pro třídy aktiv (1900–2008)

		United States			World			World excluding U.S.		
	Asset	*GM*	*AM*	*SD*	*GM*	*AM*	*SD*	*GM*	*AM*	*SD*
Nominal Returns	Equities	9.2%	11.1%	20.2%	8.4%	9.8%	17.3%	7.9%	9.7%	20.1%
	Bonds	5.2%	5.5%	8.3%	4.8%	5.2%	8.6%	4.2%	5.0%	13.0%
	Bills	4.0%	4.0%	2.8%	–	–	–	–	–	–
	Inflation	3.0%	3.1%	4.9%	–	–	–	–	–	–
Real Returns	Equities	6.0%	8.0%	20.4%	5.2%	6.7%	17.6%	4.8%	6.7%	20.2%
	Bonds	2.2%	2.6%	10.0%	1.8%	2.3%	10.3%	1.2%	2.2%	14.1%
	Bills	1.0%	1.1%	4.7%	–	–	–	–	–	–
Premiums	Equities vs. bills	5.0%	7.0%	19.9%	–	–	–	–	–	–
	Equities vs. bonds	3.8%	5.9%	20.6%	3.4%	4.6%	15.6%	3.5%	4.7%	15.9%
	Bonds vs. bills	1.1%	1.4%	7.9%	–	–	–	–	–	–

All returns are in percent per annum measured in US$. GM = geometric mean, AM = arithmetic mean, SD = standard deviation.

"World" consists of 17 developed countries: Australia, Belgium, Canada, Denmark, France, Germany, Ireland, Italy, Japan, the Netherlands, Norway, South Africa, Spain, Sweden, Switzerland, United Kingdom, and the United States. Weighting is by each country's relative market capitalization size.

Sources: Credit Suisse Global Investment Returns Sourcebook, 2009. Compiled from tables 62, 65, and 68. T-bills and inflation rates are not available for the world and world excluding the United States.

Předpoklady Mean-Variance Analýzy

Mean-variance analýza

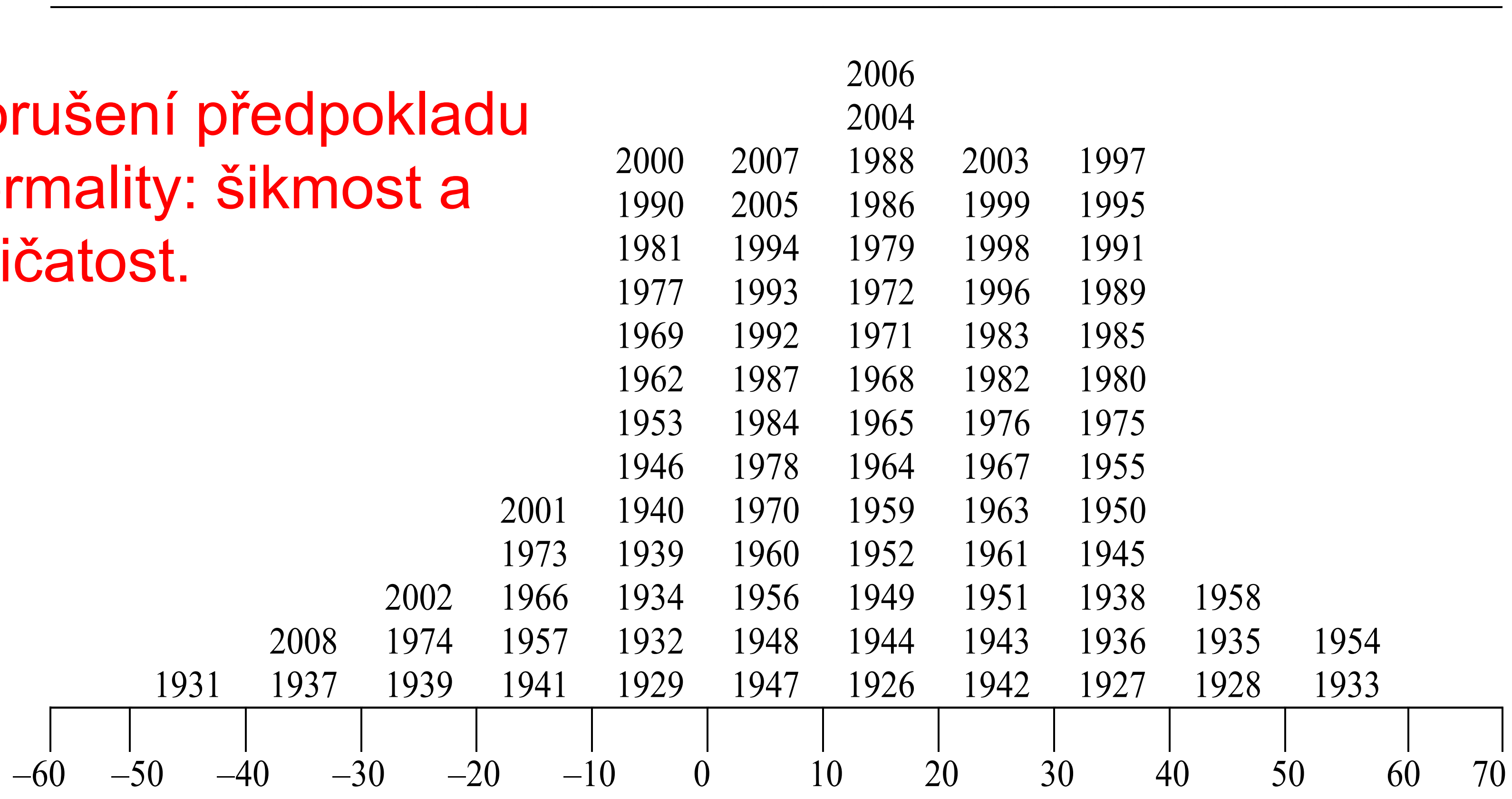
Výnosnosti mají normální rozdělení

Trhy jsou informačně a operativně efektivní

MUNI
ECON

Histogram výnosů akcií velkých společností v USA, 1926–2008

Porušení předpokladu normality: šikmost a špičatost.



Teorie užitku

Očekávaný výnos

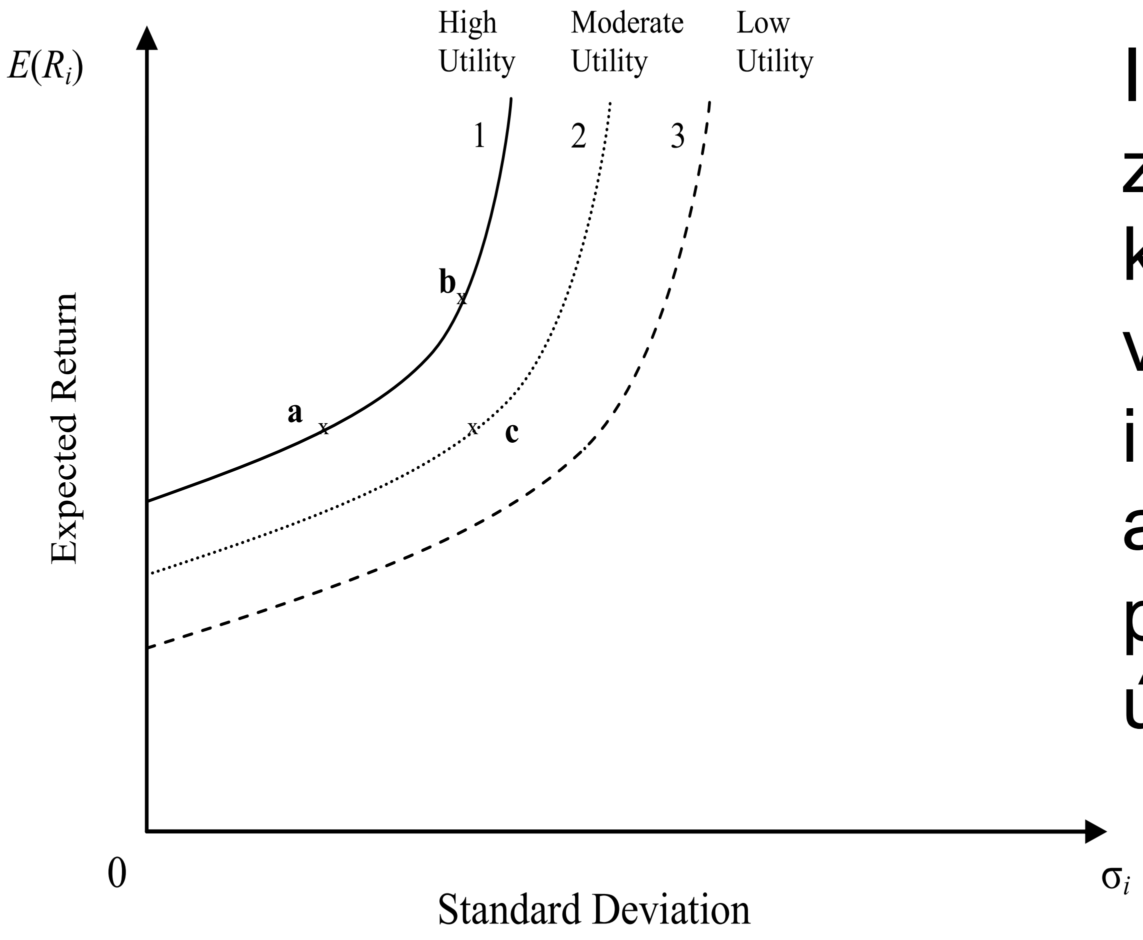
Rozptyl/ riziko

$$U = E(r) - \frac{1}{2} A\sigma^2$$

Užitková funkce investora

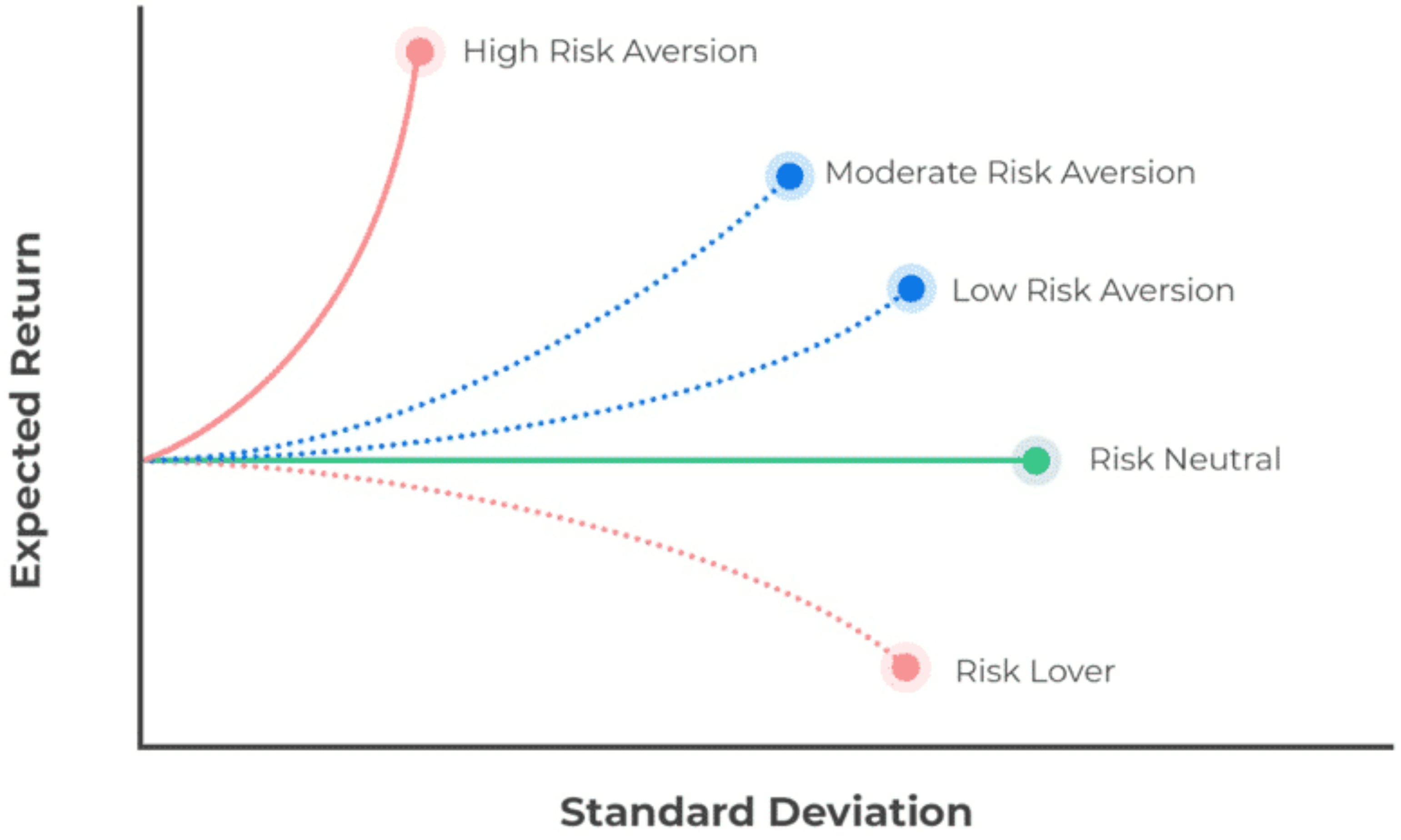
Míra tolerance k riziku nebo averze k riziku

Indiferenční křivky



Indiferenční křivka zobrazuje kombinaci rizik a výnosu, které by investor akceptoval a které přinášejí stejnou úroveň užitku.

Risk Aversion for Different Types of Investors



Očekávaný výnos a riziko portfolio obsahujícího bezrizikové aktivum

– Předpokládejme portfolio dvou aktiv, bezrizikového aktiva a rizikového aktiva. Očekávaný výnos a riziko pro toto portfolio lze určit pomocí následujících vzorců:

$$E(R_P) = w_1 R_f + (1 - w_1) E(R_i)$$

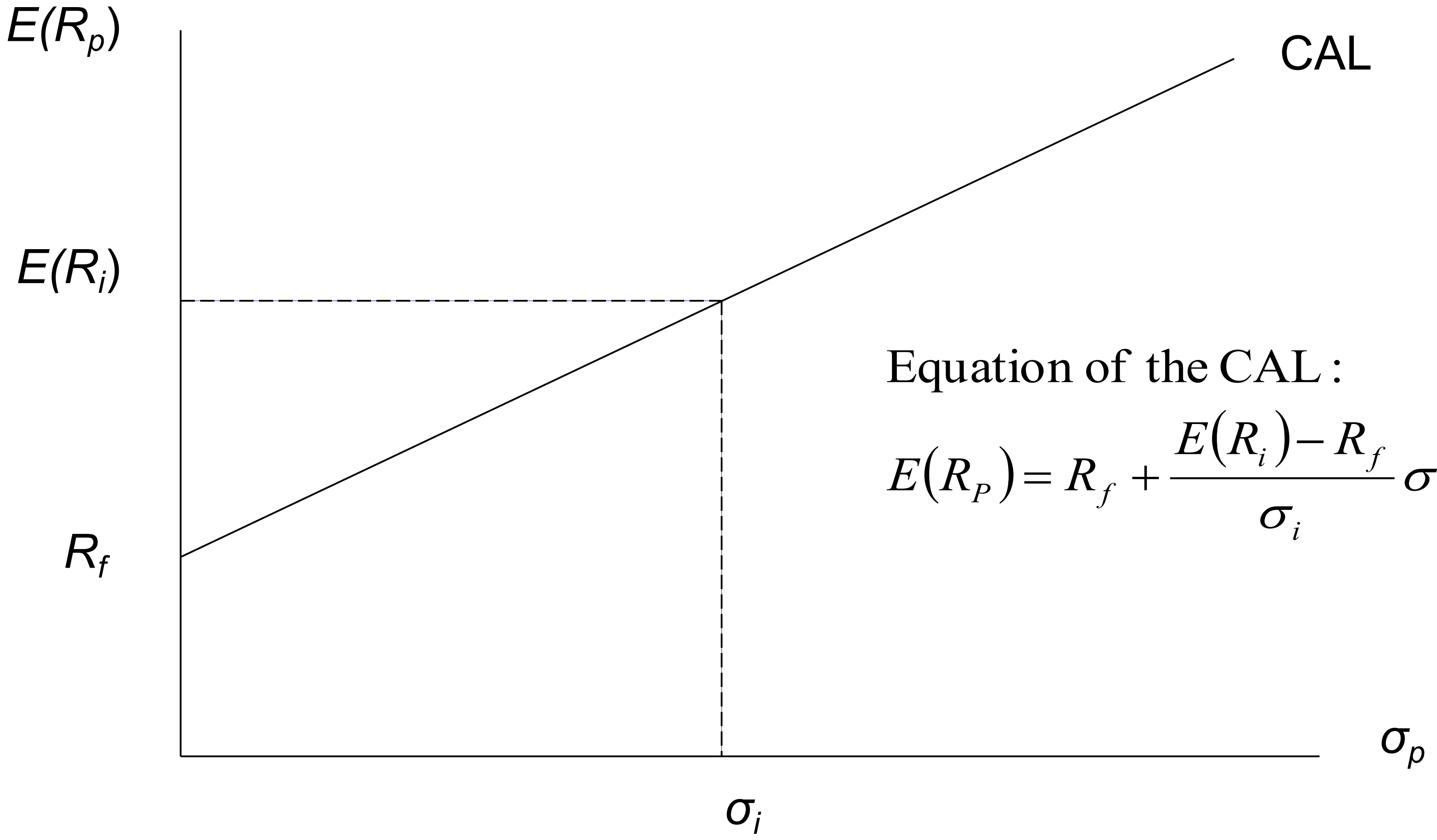
$$\sigma_P^2 = w_1^2 \sigma_f^2 + (1 - w_1)^2 \sigma_i^2 + 2 w_1 (1 - w_1) \rho_{fi} \sigma_f \sigma_i$$

$$= (1 - w_1)^2 \sigma_i^2$$

$$\sigma_P = \sqrt{(1 - w_1)^2 \sigma_i^2} = (1 - w_1) \sigma_i$$

MUNI
ECON

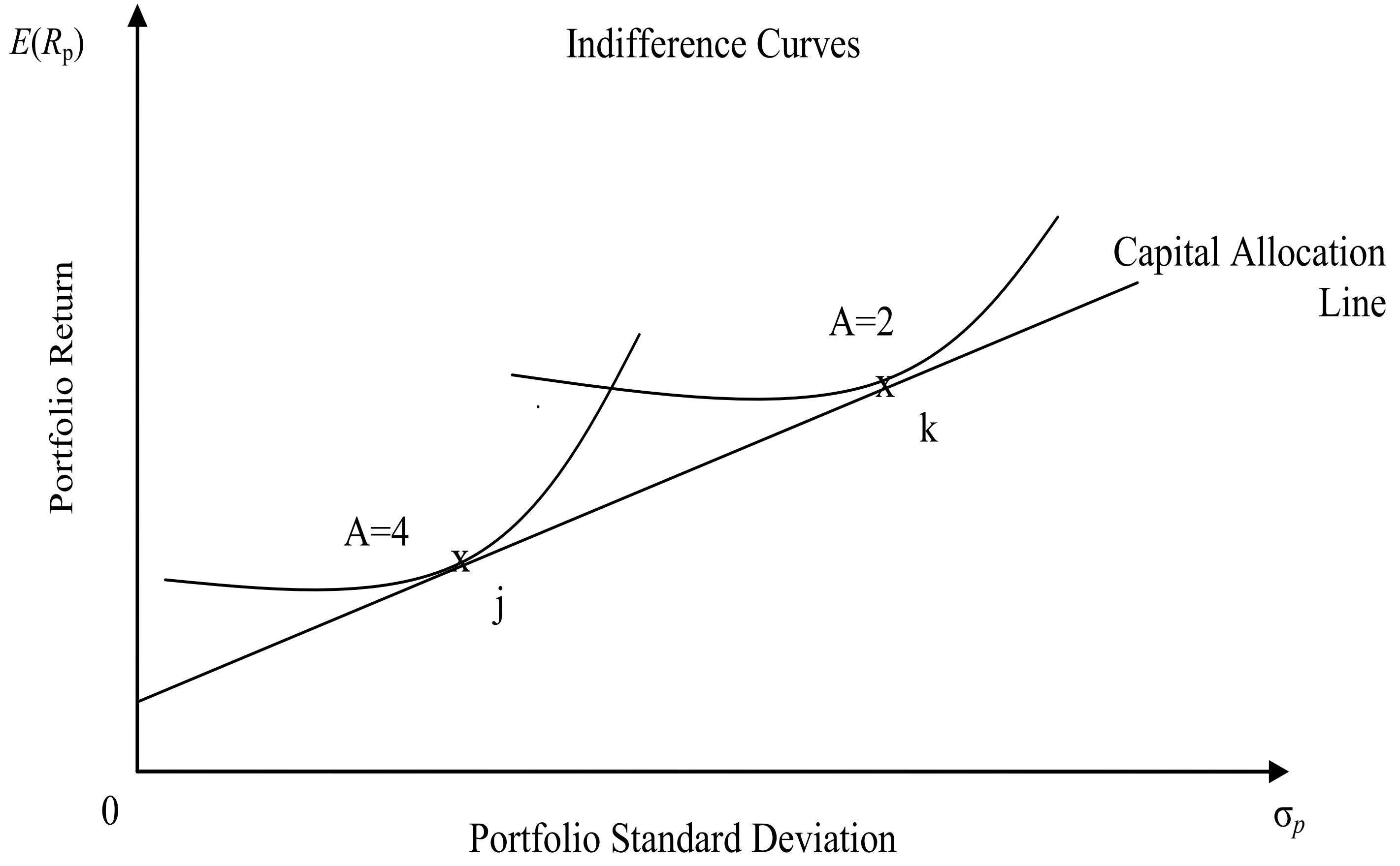
Capital Allocation Line (CAL)/ Přímka kapitálového trhu



Equation of the CAL:

$$E(R_P) = R_f + \frac{E(R_i) - R_f}{\sigma_i}\sigma_P$$

Výběr portfolia pro dva investory s různou úrovní averze k riziku



Korelace a riziko portfolia

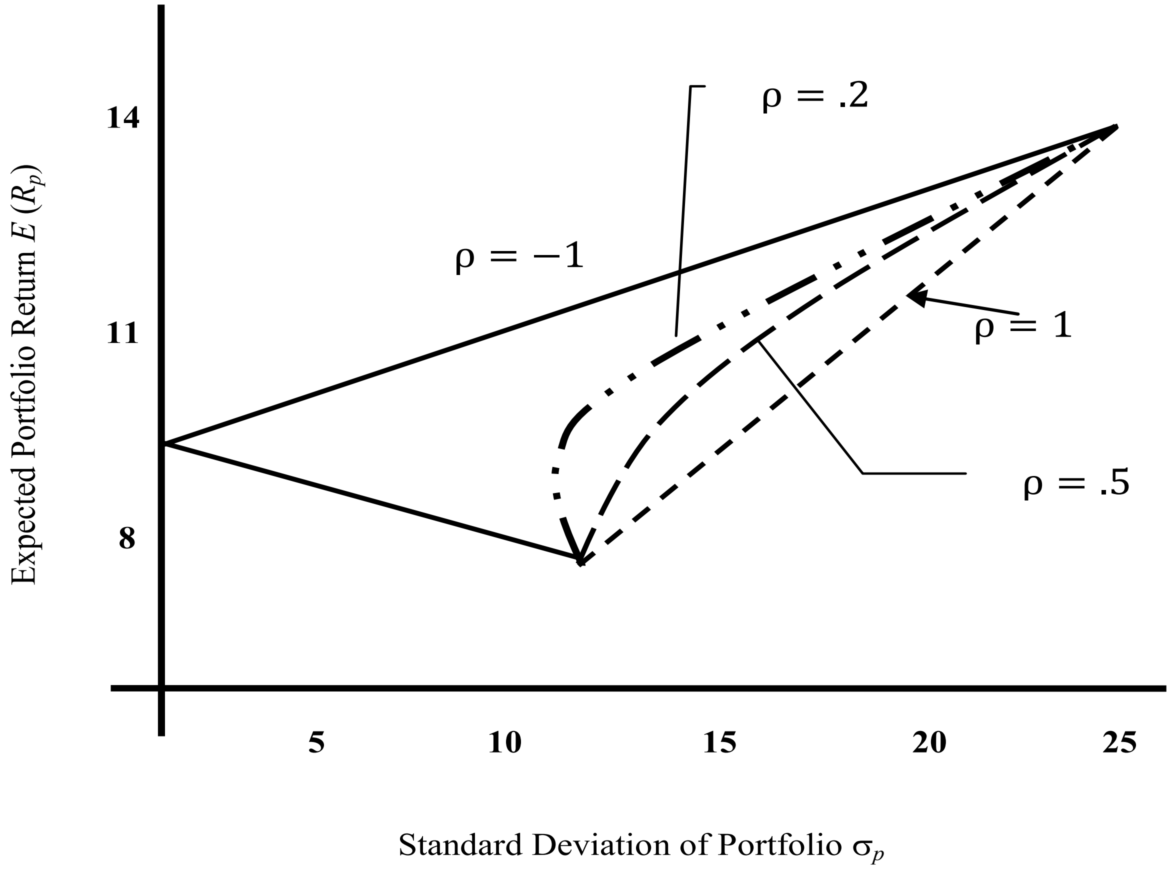
Korelace mezi aktivy v portfoliu

Riziko portfolia

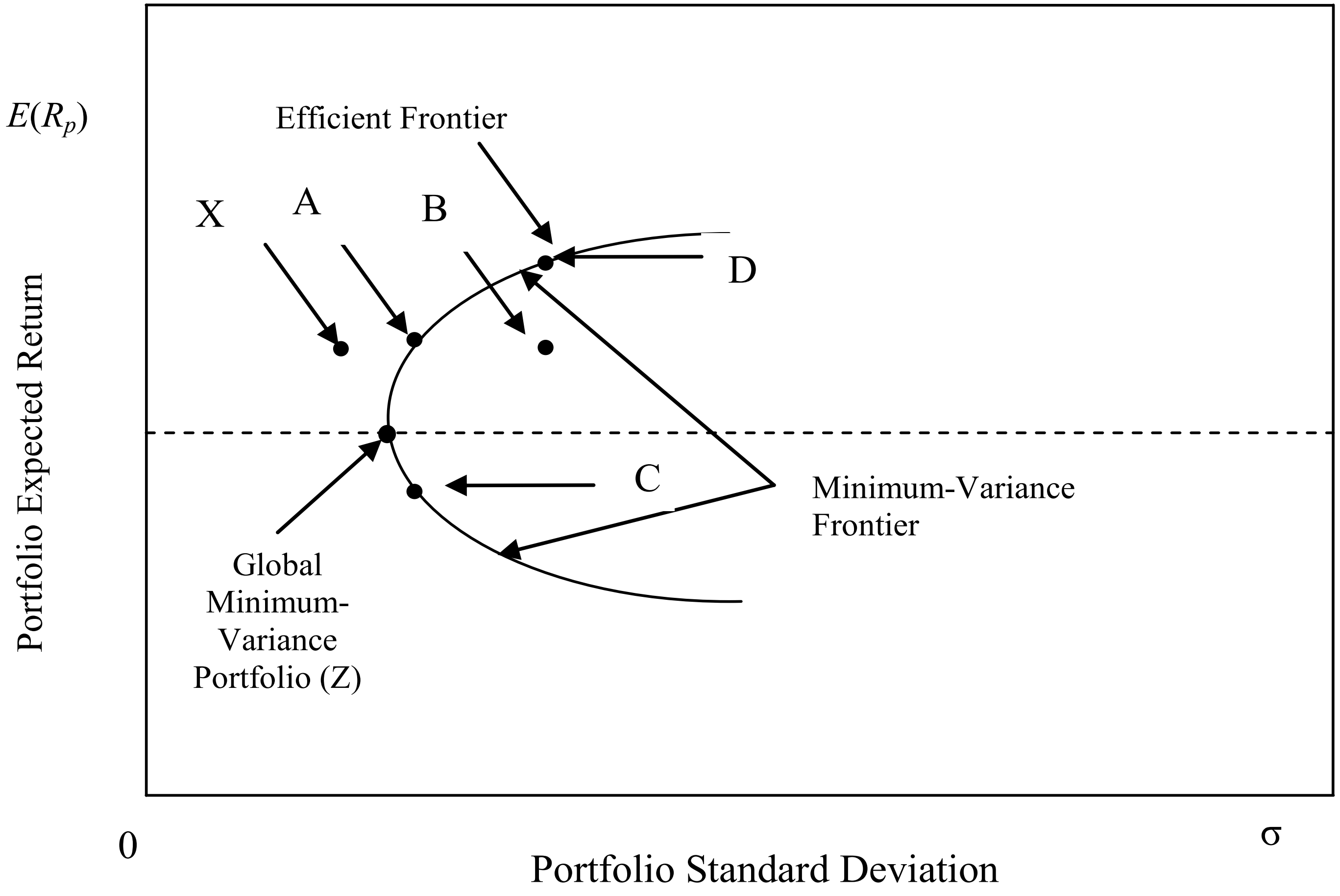
Vztah mezi rizikem a výnosem

Weight in Asset 1	Portfolio Return	Portfolio Risk with Correlation of			
		1.0	0.5	0.2	–1.0
0%	15.0	25.0	25.0	25.0	25.0
10%	14.2	23.7	23.1	22.8	21.3
20%	13.4	22.4	21.3	20.6	17.6
30%	12.6	21.1	19.6	18.6	13.9
40%	11.8	19.8	17.9	16.6	10.2
50%	11.0	18.5	16.3	14.9	6.5
60%	10.2	17.2	15.0	13.4	2.8
70%	9.4	15.9	13.8	12.3	0.9
80%	8.6	14.6	12.9	11.7	4.6
90%	7.8	13.3	12.2	11.6	8.3
100%	7.0	12.0	12.0	12.0	12.0

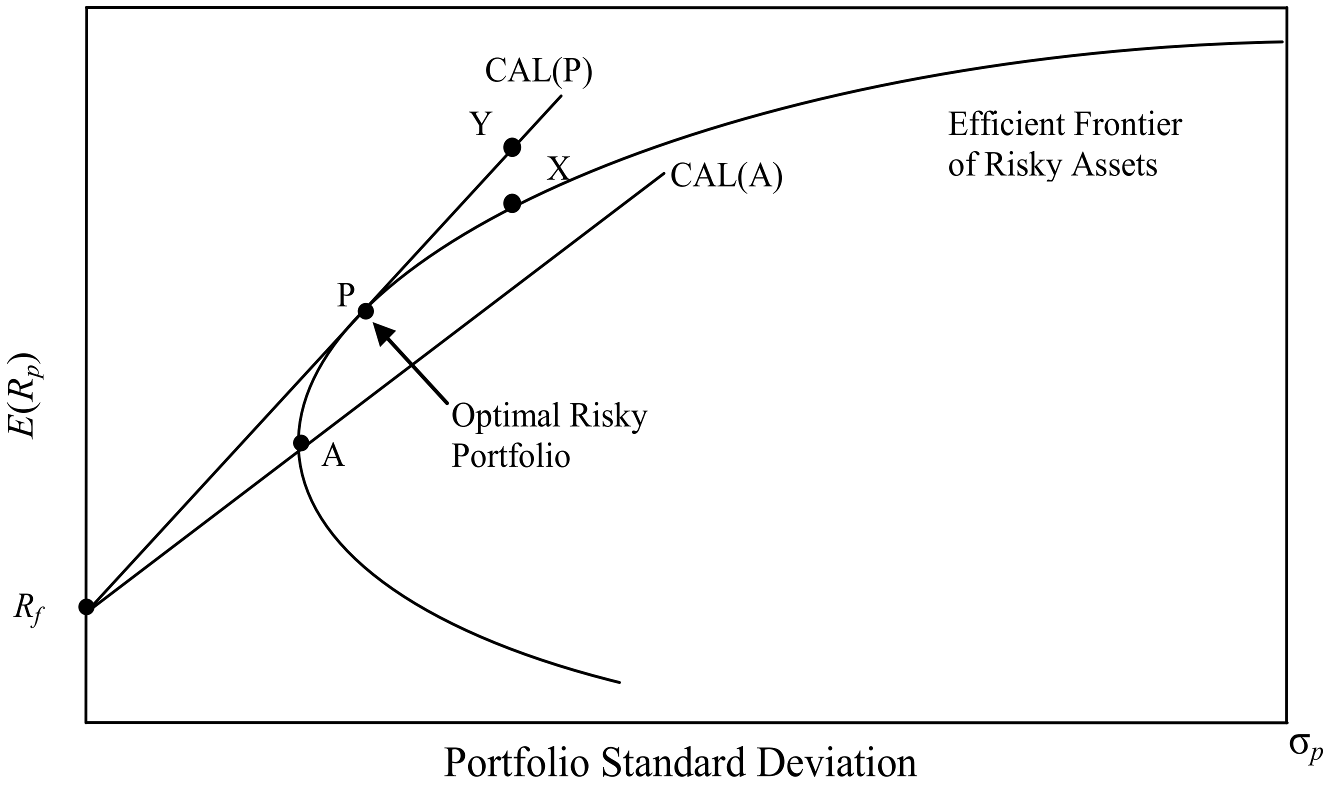
Vztah mezi rizikem a výnosem



Minimum-Variance Frontier (hranice)

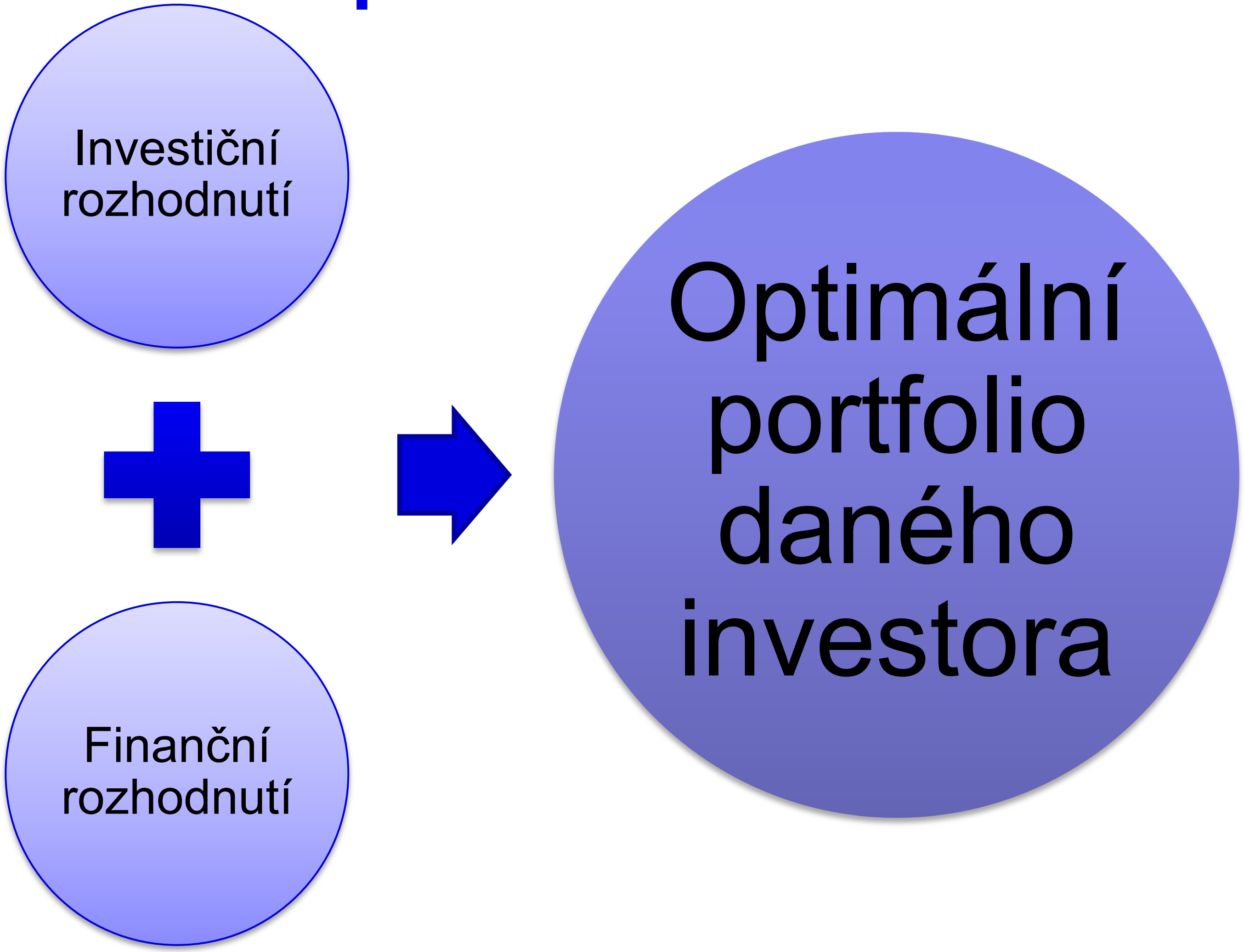


Capital Allocation Line a Optimal Risky Portfolio

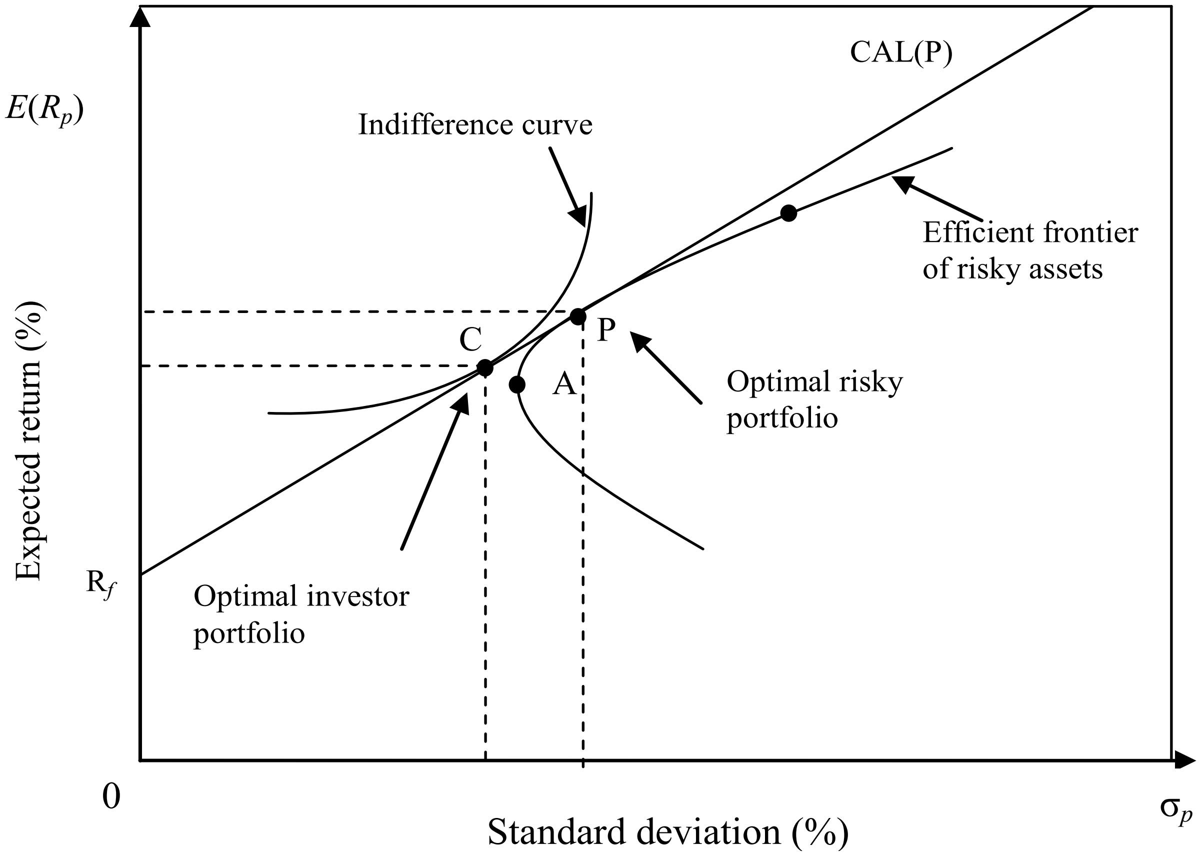


CAL(P) je optimální linie alokace kapitálu a portfolio P je optimální rizikové portfolio.

Separační theorem



Optimální portfolio daného investora



Vzhledem k investorově indiferenční křivce je optimální portfolio C na CAL(P).

Portfolio obsahující riziko a bezrizikové aktivum

Kombinace bezrizikového a rizikového aktiva

Stanovení tzv. Capital allocation line (CAL)

Bod dotyku užitkové funkce a CAL stanoví:

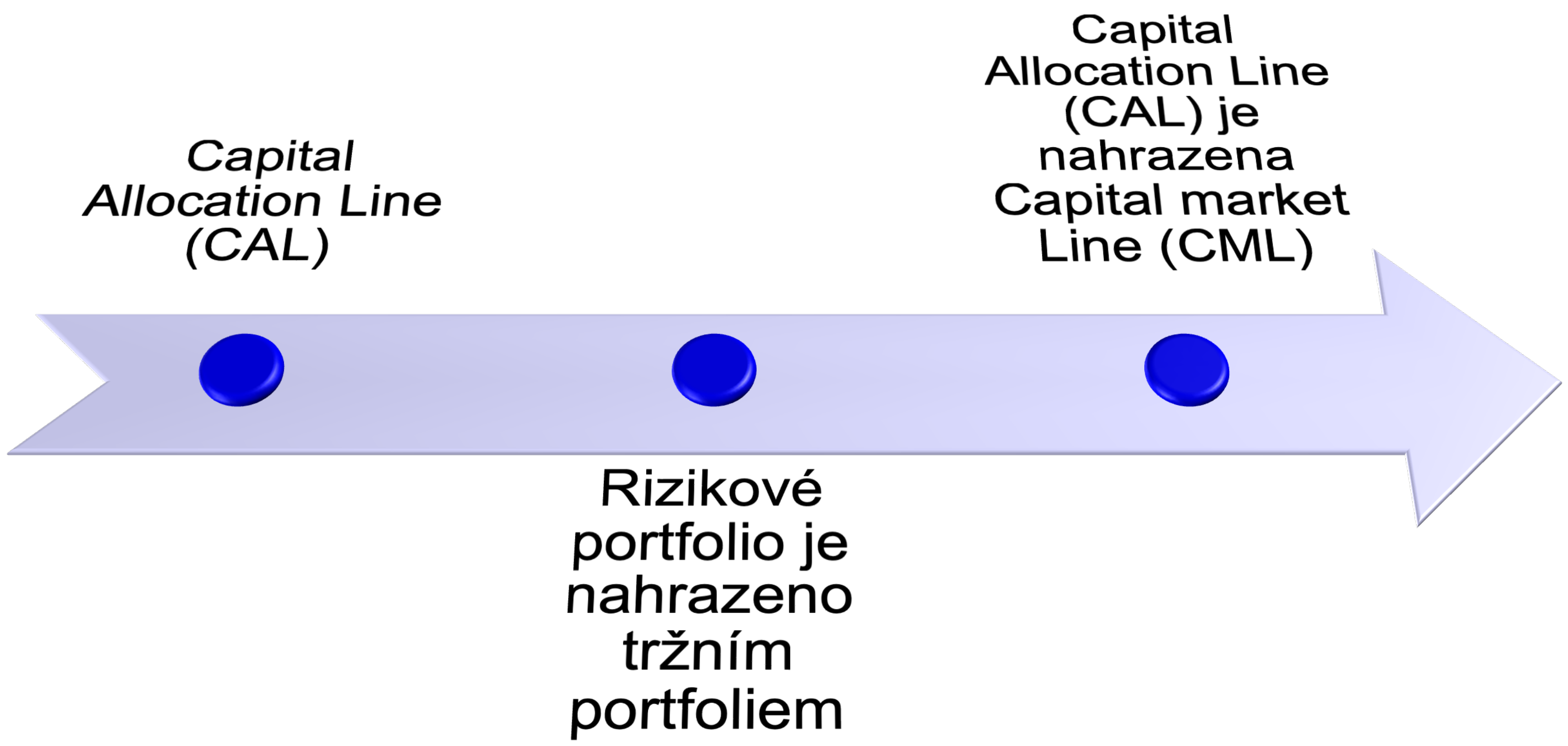
Optimální rizikové portfolio

Riziko a výnos portfolia

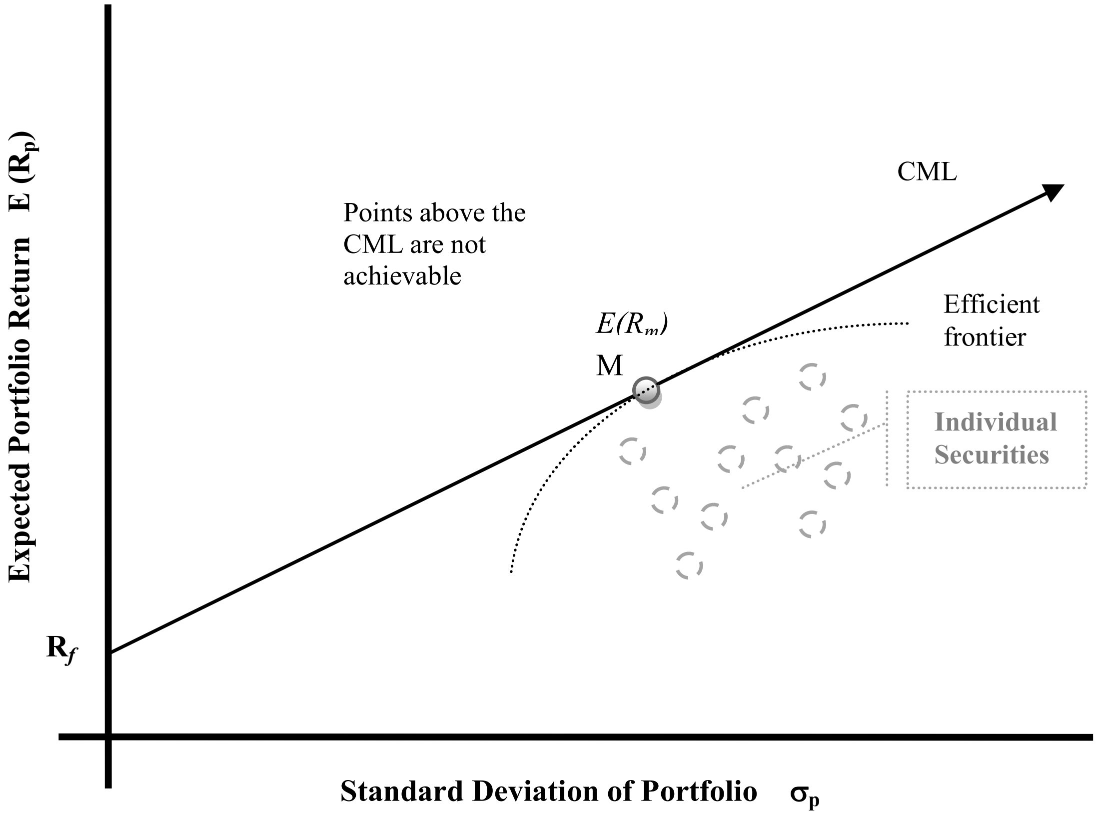
Portfolio	Weight in Asset 1	Weight in Asset 2	Portfolio Return	Portfolio Standard Deviation
X	25.0%	75.0%	**6.25%**	**9.01%**
Y	50.0	50.0	**7.50**	**11.18**
Z	75.0	25.0	**8.75**	**15.21**
Return	10.0%	5.0%		
Standard deviation	20.0%	10.0%		
Correlation between Assets 1 and 2		0.0%		

$$\sigma_X = \sqrt{(.25^2)(.20^2) + (.75^2)(.10)^2 + (.25)(0)(.20)(.10) + (.75)(0)(.10)(.20)} \approx 9.01\%$$

Capital Market Line (CML) speciální případ CAL



Capital Market Line



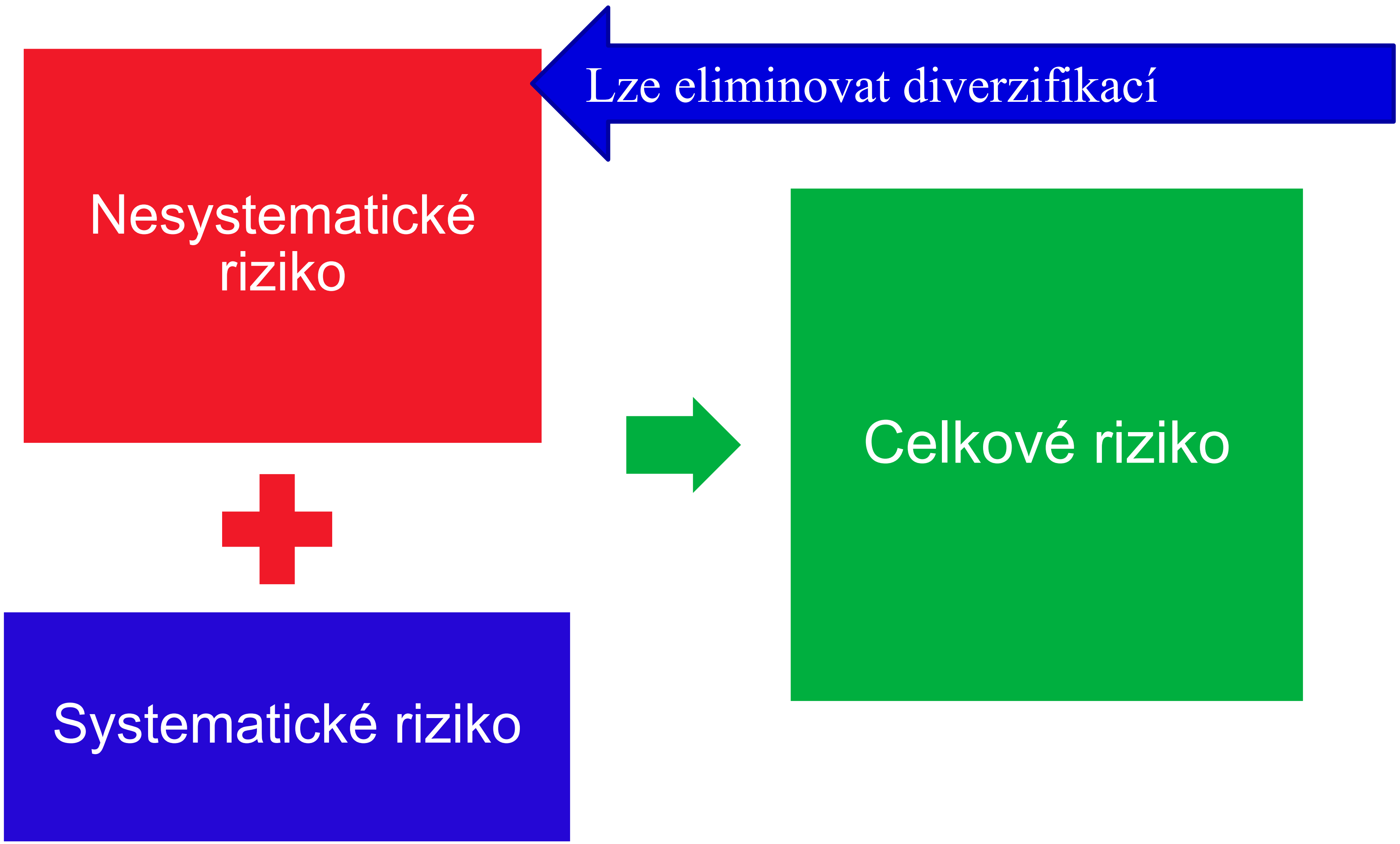
CML: Výnos a riziko

$$E\left(R_p\right) = w_1 R_f + \left(1 - w_1\right) E\left(R_m\right)$$

$$\sigma_p = \left(1 - w_1\right) \sigma_m$$

Substitucí lze E(Rp) vyjádřit pomocí σp, a to dává rovnici pro CML:

$$E\left(R_p\right) = R_f + \left(\frac{E\left(R_m\right) - R_f}{\sigma_m}\right) \times \sigma_p$$


Lze eliminovat diverzifikací
Nesystematické riziko
Celkové riziko
Systematické riziko

Hodnocení výkonu portfolia: Sharpe Ratio a Treynorův poměr

Sharpe Ratio

- Zaměřeno na celkové riziko

$$\text{Sharpe ratio} = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

Treynor Ratio

- Zaměřeno na systematické riziko

$$\text{Treynor ratio} = \frac{R_p - R_f}{\beta_p}$$

Beta portfolia

– Portfolio beta je vážený součet bet dílčích cenných papírů:

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i = (0.40 \times 1.50) + (0.60 \times 1.20) = 1.32$$

Očekávaný výnos portfolia podle CAPM je:

$$E\left(R_p\right) = R_f + \beta_p \left[E\left(R_m\right) - R_f \right]$$

$$E\left(R_p\right) = 3\% + 1.32\left[9\% - 3\%\right] = 10.92\%$$

Hodnocení výkonu portfolia: M-squared (M2)

Sharpe Ratio

- Identické se Sharpe ratio
- Vyjádřeno v procentech

$$M^2 = \left(R_p - R_f\right)\frac{\sigma_m}{\sigma_p} - \left(R_m - R_f\right)$$

Hodnocení výkonu portfolia: Jensen’s Alpha

Odhad beta koeficientu portfolia → Výpočet rizikově váženého výnosu → Odečtení rizikově váženého výnosu od skutečného výnosu

$$\alpha_p = R_p - \left[R_f + \beta_p \left(R_m - R_f \right) \right]$$

Metody hodnocení výkonnosti portfolia

Manager	R_i	σ_i	β_i	$E(R_i)$	Sharpe Ratio	Treynor Ratio	M^2	α_i
X	10.0%	20.0%	1.10	9.6%	0.35	0.064	0.65%	0.40%
Y	11.0	10.0	0.70	7.2	0.80	0.114	9.20	3.80
Z	12.0	25.0	0.60	6.6	0.36	0.150	0.84	5.40
M	9.0	19.0	1.00	9.0	0.32	0.060	0.00	0.00
R_f	3.0	0.0	0.00	3.0	–	–	–	0.00