Množiny a výroková logika

Lukáš Kokrda

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2020

Množiny

Zavedení pojmu množiny

- Jsme zvyklí v našem světě pojmenovávat skupiny objektů.
- Objektů se společnou vlastností nebo absencí vlastnosti.
- Například sudá (párná) čísla:

„Jsou všechna celá čísla dělitelná bezezbytku číslem 2.“

- Nebo lichá (nepárná) čísla:

„Jsou všechna celá čísla nedělitelná bezezbytku číslem 2.“

Značení množin a jejich vlastnosti

- velké písmeno
    - množina symbolů pro karty $K = \{♥, ♠, ♣, ♦\}$
    - množina mincí

- býti prvkem
    - epsilon $"\in"$
    - pětikoruna $\in M$
    - stokoruna $\notin M$
- ignorujeme multiplicity
    - každý prvek je v množině pouze jednou
- mohutnost množiny
    - počet prvků množiny
    - $|K| = 4$ nebo $|M| = 6$

Množiny

Typy množin

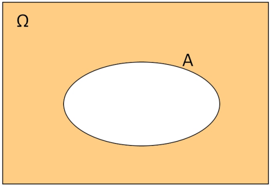
- konečná množina
  - můžeme prvky vypsat bez ohledu na čas
  - $A = \{a, b, c, d, e\}$
- nekonečná množina
  - nelze vypsat všechny prvky
  - $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
  - $C = (2, 3)$
- prázdná množina
  - neobsahuje žádné prvky
  - $\emptyset, \{\}$
- podmnožina
  - množinová inkluze
  - všechny prvky jedné množiny jsou obsaženy v druhé množině
  - $A \subseteq B, A \subset B$

Významné číselné množiny

- Přirozená čísla: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- Přirozená čísla s 0: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- Celá čísla: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Racionální čísla (čísla zapsatelná zlomkem): $\mathbb{Q} = \{-\frac{22}{7}, -2, 0, \frac{7}{3}, \dots\}$
- Iracionální čísla (čísla s nekonečným neperiodickým rozvojem): $\mathbb{I} = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, e, \pi, \dots\right\}$
- Reálná čísla: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$
- Komplexní čísla: $\mathbb{C} = \left\{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$

Operace s množinami

Unární operace - **Doplněk/komplement** množiny … $\overline{A}, A'$



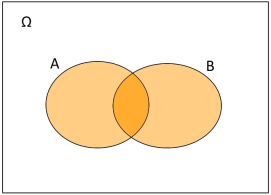
Příklad

$\Omega = \mathbb{R}$ *Reálná čísla*
$A = (-\infty, 2\rangle$ *Čísla menší rovna 2*
$A' = \ldots$ *?*

Operace s množinami

Binární operace **sjednocení** množin . . . " ∪ "

- $A \cup B$ je seskupení všeho, co je v obou skupinách



- Co je na obrázku zavádějící?

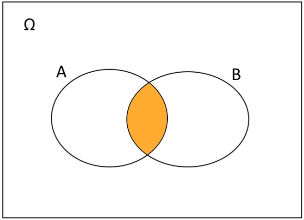
Příklad

Množina $M = \{\lambda, \mu, \alpha, \gamma\}$
Množina $N = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$
$M \cup N = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu\}$

Operace s množinami

Binární operace - **průnik** množin . . . " ∩ "

- $A \cap B$ jsou prvky, které jsou společné oběma množinám



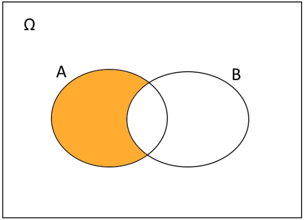
Příklad

Množina $M = \{\lambda, \mu, \alpha, \gamma\}$
Množina $N = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$
$M \cap N = \{\alpha, \gamma\}$

Operace s množinami

Binární operace - **rozdíl** množin ..." $\setminus$ "

- $A \setminus B$ jsou prvky, které patří do množiny A a přitom nepatří do množiny B



Příklad

H je množina hodnocení ze zkoušky, tj. $H = \{A, B, C, D, E, F\}$
U je množina úspěšného hodnocení zkoušky, tj.
$U = \{A, B, C, D, E\}$
$H \setminus U = \{F\}$, *tj. množina neúspěšného hodnocení zkoušky*

Operace s množinami

Binární operace - **kartézský součin** …" $\times$ "

- $A \times B$ jsou všechny dvojice, kde první prvek je z první množiny a druhý prvek z druhé množiny

Příklad

$K_F = K_M = \{A, B, AB, 0\}$ *je množina krevních skupin, pak kartézský součin* $K_F \times K_M =$ $\{(A, A); (A, B); (A, AB); (A, 0); (B, A); (B, B); (B, AB); (B, 0); (AB, A); (AB, B); (AB, AB); (AB, 0); (0, A); (0, B); (0, AB); (0, 0)\}$

Nejčastější kartézské součiny

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ body v rovině $[x, y]$
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ body v „prostoru“ $[x, y, z]$

Výrokový počet

Výrok je tvrzení u něhož lze rozhodnout zda je pravdivé, nebo nepravdivé

Příklady výroků? Více než polovina příkladů výroků nejsou výroky.

- Den má 86 400 sekund.
- $1 + 2 = 5$
- Strč prst skrz krk.
- S námi se vyplatí počítat.
- Máte rádi ESF?

Značení výroků a jejich pravdivostní hodnoty:

- výroky: p, q
- pravdivý - P, 1, T
- nepravdivý - N, 0, F

Kategorie vět, které nejsou výrokem.

otázky, rozkazy, názvy, subjektivní názory, výroky s proměnou

Negace

Negace výroku p, značíme $\neg p$ někdy také $\overline{p}$

Není pravda, že . . .

Neplatí, že . . .

Příklad

Výrok $p \ldots$: Matematika 0 je zbytečný předmět.

Výrok $\neg p \ldots$: Není pravda, že Matematika 0 je zbytečný předmět.

Pravdivostní tabulka

Negace	
p	$\neg p$
1	0
0	1

Konjunkce „logické a“

Konjunkce výroku p, q**, značíme** $p \wedge q$; Výrok p a zároveň q

Příklad

Výrok p . . . : Petr je student prvního ročníku.
Výrok p . . . : Petr má prukaz ISIC.
Výrok p ∧ q: Petr je student prvního ročníku a zároveň má prukaz ISIC.

Pravdivostní tabulka

Konjunkce		
p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunkce „logické nebo“

Disjunkce výroku p, q**, značíme** $p \vee q$; Výrok p nebo výrok q

Příklad

Výrok p . . .: Absolvování vstupního testu umožnuje studium Mat.
Výrok p . . .: Absolvování Mat0 umožnuje studium Mat.
Výrok $p \vee q$*: Absolvování vstupního testu, nebo absolvování Mat0 umožnuje studium Mat.*

Pravdivostní tabulka

Disjunkce		
p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikace

Implikace výroku p, q**, značíme** $p \Rightarrow q$;
Když výrok p, pak výrok q

Příklad

Výrok p . . .: Dojedli jste oběd.
Výrok q . . .: Dostanete zmrzlinu.
Výrok $p \Rightarrow q$*: Když dojíte oběd, pak dostanete zmrzlinu.*

Pravdivostní tabulka

Implikace			
p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftarrow q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

Ekvivalence

Ekvivalence výroku p, q**, značíme** $p \Leftrightarrow q$; Výrok p, právě tehdy, když výrok q

Příklad

Výrok p . . .: Zaplatili jsme pokutu.
Výrok q . . .: Udělali jsme přestupek.
Výrok p $\Leftrightarrow$ *q: Zaplatili jsme pokutu, právě tehdy, když jsme udělali přestupek.*

Pravdivostní tabulka

Ekvivalence		
p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Vzorový příklad

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{(a \wedge b)}_{I.} \Leftrightarrow \underbrace{(b \vee c)}_{II.})}_{III.} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{(\overline{a} \Rightarrow c)}_{IV.} \wedge \underbrace{(\neg \underbrace{(b \vee \overline{c})}_{V.})}_{VI.})}_{VII.}}_{VIII.}$$

a	b	c										
1	1	1										
1	1	0										
1	0	1										
1	0	0										
0	1	1										
0	1	0										
0	0	1										
0	0	0										

Vzorový příklad

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{(a \wedge b)}_{I.} \Leftrightarrow \underbrace{(b \vee c)}_{II.})}_{III.} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{(\overline{a} \Rightarrow c)}_{IV.} \wedge \underbrace{(\neg \underbrace{(b \vee \overline{c})}_{V.})}_{VI.})}_{VII.}}_{VIII.}$$

a	b	c	$\overline{a}$									
1	1	1	0									
1	1	0	0									
1	0	1	0									
1	0	0	0									
0	1	1	1									
0	1	0	1									
0	0	1	1									
0	0	0	1									

Vzorový příklad

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{(a \wedge b)}_{I.} \Leftrightarrow \underbrace{(b \vee c)}_{II.})}_{III.} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{(\overline{a} \Rightarrow c)}_{IV.} \wedge \underbrace{(\neg \underbrace{(b \vee \overline{c})}_{V.})}_{VI.})}_{VII.}}_{VIII.}$$

a	b	c	$\overline{a}$	$\overline{c}$								
1	1	1	0	0								
1	1	0	0	1								
1	0	1	0	0								
1	0	0	0	1								
0	1	1	1	0								
0	1	0	1	1								
0	0	1	1	0								
0	0	0	1	1								

Vzorový příklad

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{(a \wedge b)}_{I.} \Leftrightarrow \underbrace{(b \vee c)}_{II.})}_{III.} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{(\overline{a} \Rightarrow c)}_{IV.} \wedge \underbrace{(\neg \underbrace{(b \vee \overline{c})}_{V.})}_{VI.})}_{VII.}}_{VIII.}$$

a	b	c	$\overline{a}$	$\overline{c}$	I.							
1	1	1	0	0	1							
1	1	0	0	1	1							
1	0	1	0	0	0							
1	0	0	0	1	0							
0	1	1	1	0	0							
0	1	0	1	1	0							
0	0	1	1	0	0							
0	0	0	1	1	0							

Vzorový příklad

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{(a \wedge b)}_{I.} \Leftrightarrow \underbrace{(b \vee c)}_{II.})}_{III.} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{(\overline{a} \Rightarrow c)}_{IV.} \wedge \underbrace{(\neg \underbrace{(b \vee \overline{c})}_{V.})}_{VI.})}_{VII.}}_{VIII.}$$

a	b	c	$\overline{a}$	$\overline{c}$	I.	II.						
1	1	1	0	0	1	1						
1	1	0	0	1	1	1						
1	0	1	0	0	0	1						
1	0	0	0	1	0	0						
0	1	1	1	0	0	1						
0	1	0	1	1	0	1						
0	0	1	1	0	0	1						
0	0	0	1	1	0	0						

Vzorový příklad

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{((a \wedge b)}_{I.} \Leftrightarrow \underbrace{(b \vee c))}_{II.}}_{III.} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{(\overline{a} \Rightarrow c)}_{IV.} \wedge \underbrace{(\neg \underbrace{(b \vee \overline{c})}_{V.}))}_{VI.}}_{VII.}}_{VIII.}$$

a	b	c	$\overline{a}$	$\overline{c}$	I.	II.	III.					
1	1	1	0	0	1	1	1					
1	1	0	0	1	1	1	1					
1	0	1	0	0	0	1	0					
1	0	0	0	1	0	0	1					
0	1	1	1	0	0	1	0					
0	1	0	1	1	0	1	0					
0	0	1	1	0	0	1	0					
0	0	0	1	1	0	0	1					

Vzorový příklad

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{(a \wedge b)}_{I.} \Leftrightarrow \underbrace{(b \vee c)}_{II.})}_{III.} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{(\overline{a} \Rightarrow c)}_{IV.} \wedge \underbrace{(\neg \underbrace{(b \vee \overline{c})}_{V.})}_{VI.})}_{VII.}}_{VIII.}$$

a	b	c	$\overline{a}$	$\overline{c}$	I.	II.	III.	IV.				
1	1	1	0	0	1	1	1	1				
1	1	0	0	1	1	1	1	1				
1	0	1	0	0	0	1	0	1				
1	0	0	0	1	0	0	1	1				
0	1	1	1	0	0	1	0	1				
0	1	0	1	1	0	1	0	0				
0	0	1	1	0	0	1	0	1				
0	0	0	1	1	0	0	1	0				

Vzorový příklad

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{(a \wedge b)}_{I.} \Leftrightarrow \underbrace{(b \vee c)}_{II.})}_{III.} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{(\bar{a} \Rightarrow c)}_{IV.} \wedge \underbrace{(\neg \underbrace{(b \vee \bar{c})}_{V.})}_{VI.})}_{VII.}}_{VIII.}$$

a	b	c	$\bar{a}$	$\bar{c}$	I.	II.	III.	IV.	V.			
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1			
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1			
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0			
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1			
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1			
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1			
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0			
0	0	0	1	1	0	0	1	0	1			

Vzorový příklad

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{(a \wedge b)}_{I.} \Leftrightarrow \underbrace{(b \vee c)}_{II.})}_{III.} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{(\overline{a} \Rightarrow c)}_{IV.} \wedge \underbrace{(\neg \underbrace{(b \vee \overline{c})}_{V.})}_{VI.})}_{VII.}}_{VIII.}$$

a	b	c	$\overline{a}$	$\overline{c}$	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.		
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0		
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0		
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1		
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0		
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0		
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0		
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1		
0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0		

Vzorový příklad

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{(a \wedge b)}_{I.} \Leftrightarrow \underbrace{(b \vee c)}_{II.})}_{III.} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{(\bar{a} \Rightarrow c)}_{IV.} \wedge \underbrace{(\neg \underbrace{(b \vee \bar{c})}_{V.})}_{VI.})}_{VII.}}_{VIII.}$$

a	b	c	$\bar{a}$	$\bar{c}$	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	
0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	

Vzorový příklad

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{(a \wedge b)}_{I.} \Leftrightarrow \underbrace{(b \vee c)}_{II.})}_{III.} \Rightarrow \underbrace{(\underbrace{(\overline{a} \Rightarrow c)}_{IV.} \wedge \underbrace{(\neg \underbrace{(b \vee \overline{c})}_{V.})}_{VI.})}_{VII.}}_{VIII.}$$

a	b	c	$\overline{a}$	$\overline{c}$	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0

Negování výrokových operací

Pravidla pro úpravy spojek

- $\overline{(p \vee q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q})$
- $\overline{(p \wedge q)} \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$
- $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$
- $\overline{(p \Leftrightarrow q)} \Leftrightarrow \overline{((p \Rightarrow q) \wedge (p \Leftarrow q))} \Leftrightarrow ((p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q))$

Výroková forma

Výroková forma je sdělení obsahující proměnou

Příklad

- *Lidé mají hmotnost větší jak 80 kg.*
- $x^2 = 1$, *pro* $x \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

- zadávání množin pomocí charakteristických vlastností,
- používání kvantifikátorů $\forall, \exists$
- obecný kvantifikátor $\forall$ „Pro všechna“
- existenční kvantifikátor $\exists$ „Existuje alespoň jedno“

Příklad

- *Všichni studenti na přednášce byli pozvaní na Opening Party Support Centre.*
- *pro* $\forall x \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ *platí* $x^2 = 1$.

Výrokový počet

Příklad

Negujte následující výroky:

- *Všichni studenti na přednášce byli pozvaní na Opening Party Support Centre.*
- *pro* $\forall x \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ *platí* $x^2 = 1$.

Pravidla pro negování výroků s kvantifikátory:

- $\overline{(\forall x \in \dots)} \Leftrightarrow (\exists x \in \dots)$
- $\overline{(\exists x \in \dots)} \Leftrightarrow (\forall x \in \dots)$.

Příklad

- *Existuje student, který na přednášce nebyl pozván na Opening Party Support Centre.*
- $\exists x \in \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ *platí* $x^2 \neq 1$.

Výrokový počet

Příklad

Ukažme, že $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) = (P \Leftrightarrow Q)$