

# Nerovnice

Lukáš Kokrda

Ekonomicko správní fakulta  
Masarykova Universita

podzim 2020

Zavedení **pojmu nerovnice**:

Jsou dány dva výrazy  $L(x)$  a  $P(x)$  s proměnnou  $x$ . Mají se určit hodnoty této proměnné z oboru  $M$ , pro něž platí

$$L(x) < P(x), \text{ resp. } L(x) > P(x)$$

nebo

$$L(x) \leq P(x), \text{ resp. } L(x) \geq P(x).$$

Zápis úlohy v některém z uvedených tvarů se nazývá nerovnice. Zavádí se obdobná terminologie jako u rovnic.

- násobení konstantou  $c$ 
  - když  $c > 0$

$$L(x) \geq P(x) \Rightarrow c \cdot L(x) \geq c \cdot P(x)$$

- když  $c < 0$

$$L(x) \geq P(x) \Rightarrow c \cdot L(x) \leq c \cdot P(x)$$

- Příklad

$$x - 3 \geq 2x - 5$$

- násobení konstantou  $c$ 
  - když  $c > 0$

$$L(x) \geq P(x) \Rightarrow c \cdot L(x) \geq c \cdot P(x)$$

- když  $c < 0$

$$L(x) \geq P(x) \Rightarrow c \cdot L(x) \leq c \cdot P(x)$$

- Příklad

$$\begin{array}{rcl} x - 3 & \geq & 2x - 5 \\ -x & \geq & -2 \quad / \cdot (-1) \end{array}$$

- násobení konstantou  $c$ 
  - když  $c > 0$

$$L(x) \geq P(x) \Rightarrow c \cdot L(x) \geq c \cdot P(x)$$

- když  $c < 0$

$$L(x) \geq P(x) \Rightarrow c \cdot L(x) \leq c \cdot P(x)$$

- Příklad

$$\begin{array}{rcl} x - 3 & \geq & 2x - 5 \\ -x & \geq & -2 \quad / \cdot (-1) \\ x & \leq & 2 \end{array}$$

- Úprava rovnice

$$x^2 - 25 \geq 3x + 15$$

- Úprava rovnice

$$\begin{aligned}x^2 - 25 &\geq 3x + 15 \\x^2 - 3x - 10 &\geq 0\end{aligned}$$

- Úprava rovnice

$$\begin{aligned}x^2 - 25 &\geq 3x + 15 \\x^2 - 3x - 10 &\geq 0 \\(x + 2) \cdot (x - 5) &\geq 0\end{aligned}$$



# Kvadratická nerovnice - řešený příklad

- Úprava rovnice

$$\begin{aligned}x^2 - 25 &\geq 3x + 15 \\x^2 - 3x - 10 &\geq 0 \\(x + 2) \cdot (x - 5) &\geq 0\end{aligned}$$

- Vlastní řešení

	-2		5
$x + 2$	-	+	+
$x - 5$	-	-	+
	+	-	+

# Kvadratická nerovnice - řešený příklad

- Úprava rovnice

$$\begin{aligned}x^2 - 25 &\geq 3x + 15 \\x^2 - 3x - 10 &\geq 0 \\(x + 2) \cdot (x - 5) &\geq 0\end{aligned}$$

- Vlastní řešení

	-2	5
$x + 2$	-	+
$x - 5$	-	+
	+	-

- Řešení  $x \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty)$

$$2x^2 + 3x - 2 < x^2 + 2x - 3$$

$$\begin{aligned}2x^2 + 3x - 2 &< x^2 + 2x - 3 \\ x^2 + x + 1 &< 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x^2 + 3x - 2 &< x^2 + 2x - 3 \\ x^2 + x + 1 &< 0\end{aligned}$$

- Diskriminant

$$\begin{aligned}2x^2 + 3x - 2 &< x^2 + 2x - 3 \\x^2 + x + 1 &< 0\end{aligned}$$

- Diskriminant

$$D = 1 - 4 = -3$$

$$\begin{aligned}2x^2 + 3x - 2 &< x^2 + 2x - 3 \\ x^2 + x + 1 &< 0\end{aligned}$$

- Diskriminant

$$D = 1 - 4 = -3$$

- Řešení

$$x \in \emptyset$$

$$(x - 2)(x + 3)(x - 5) \geq 0$$



# Kvadratická nerovnice - teď něco „normálního“

$$(x - 2)(x + 3)(x - 5) \geq 0$$

$x - 2$	$-$	$-3$	$-$	$2$	$+$	$5$	$+$
---------	-----	------	-----	-----	-----	-----	-----

# Kvadratická nerovnice - teď něco „normálního“

$$(x - 2)(x + 3)(x - 5) \geq 0$$

	-3	2	5	
$x - 2$	-	-	+	+
$x + 3$	-	+	+	+

# Kvadratická nerovnice - teď něco „normálního“

$$(x - 2)(x + 3)(x - 5) \geq 0$$

		-3	2	5
$x - 2$	-	-	+	+
$x + 3$	-	+	+	+
$x - 5$	-	-	-	+

# Kvadratická nerovnice - teď něco „normálního“

$$(x - 2)(x + 3)(x - 5) \geq 0$$

	-3	2	5	
$x - 2$	-	-	+	+
$x + 3$	-	+	+	+
$x - 5$	-	-	-	+
	-	+	-	+

# Kvadratická nerovnice - teď něco „normálního“

$$(x - 2)(x + 3)(x - 5) \geq 0$$

	-3	2	5	
$x - 2$	-	-	+	+
$x + 3$	-	+	+	+
$x - 5$	-	-	-	+
	-	+	-	+

- Řešení  $x \in \langle -3, 2 \rangle \cup \langle 5, \infty \rangle$

## Příklad:

V  $\mathbb{R}$  řešte nerovnici

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{4-x}{1-x} \leq 0$$

## Příklad:

V  $\mathbb{R}$  řešte nerovnici

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{4-x}{1-x} \leq 0$$

## Řešení:

Sečteme výrazy vlevo:

$$\frac{(x+1)(1-x) - (4-x)(x+2)}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

## Příklad:

V  $\mathbb{R}$  řešte nerovnici

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{4-x}{1-x} \leq 0$$

## Řešení:

Sečteme výrazy vlevo:

$$\frac{(x+1)(1-x) - (4-x)(x+2)}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

$$\frac{-2x-7}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

Najdeme kořeny čitatele:  $-2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -3, 5$ .



## Příklad:

V  $\mathbb{R}$  řešte nerovnici

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{4-x}{1-x} \leq 0$$

## Řešení:

Sečteme výrazy vlevo:

$$\frac{(x+1)(1-x) - (4-x)(x+2)}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

$$\frac{-2x-7}{(x+2)(1-x)} \leq 0$$

Najdeme kořeny čitatele:  $-2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -3,5$ .

Najdeme kořeny jmenovatele:

$$(x+2)(1-x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ a } x_2 = 1.$$

$$\frac{-2x - 7}{(x + 2)(1 - x)} \leq 0$$

$$\frac{-2x - 7}{(x + 2)(1 - x)} \leq 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & -3,5 & & -2 & & 1 \\ \hline -2x - 7 & + & | & - & | & - & | & - \end{array}$$

$$\frac{-2x - 7}{(x + 2)(1 - x)} \leq 0$$

	-3,5	-2	1
$-2x - 7$	+	-	-
$x + 2$	-	-	+

$$\frac{-2x - 7}{(x + 2)(1 - x)} \leq 0$$

		-3,5	-2	1
$-2x - 7$	+	-	-	-
$x + 2$	-	-	+	+
$1 - x$	+	+	+	-

$$\frac{-2x - 7}{(x + 2)(1 - x)} \leq 0$$

	-3,5	-2	1
$-2x - 7$	+	-	-
$x + 2$	-	-	+
$1 - x$	+	+	-
	-	+	+

$$\frac{-2x - 7}{(x + 2)(1 - x)} \leq 0$$

	-3,5	-2	1
$-2x - 7$	+	-	-
$x + 2$	-	-	+
$1 - x$	+	+	-
	-	+	+

Z tabulky je zřejmé, že řešením jsou intervaly  
 $(-\infty, -3,5) \cup (-2, 1)$

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$



$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} \leq 0$$

-1

4

---

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} \leq 0$$

	-1		4		
4 - x	+		+		-

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} \leq 0$$

		-1		4	
$4-x$	+		+		-
$x+1$	-		+		+

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} \leq 0$$

	-1	4
$4-x$	+	-
$x+1$	-	+
	-	+

$$\frac{x+6}{x+1} \leq 2$$

$$\frac{x+6}{x+1} - 2 \leq 0$$

$$\frac{4-x}{x+1} \leq 0$$

	-1	4
$4-x$	+	-
$x+1$	-	+
	-	-

Z tabulky je zřejmé, že řešením jsou intervaly  $(-\infty, -1) \cup (-2, 1)$

**Příklad:**

Řešte nerovnici

$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna  $x \in \langle -33, \infty \rangle$ .



### Příklad:

Řešte nerovnici

$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna  $x \in \langle -33, \infty \rangle$ . Jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné můžeme umocnit na druhou. To platí pro  $x \geq -3$ . Úlohu dělíme na dvě části:

### Příklad:

Řešte nerovnici

$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna  $x \in \langle -33, \infty \rangle$ . Jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné můžeme umocnit na druhou. To platí pro  $x \geq -3$ . Úlohu dělíme na dvě části:

- a) pro interval  $x \in \langle -33, -3 \rangle$  platí, že levá strana je záporná a pravá nezáporná, tedy nerovnice je splněna, pro všechna  $x \in \langle -33, -3 \rangle$ , tj.  $K_1 = \langle -33, -3 \rangle$

## Příklad:

Řešte nerovnici

$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna  $x \in \langle -33, \infty \rangle$ . Jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné můžeme umocnit na druhou. To platí pro  $x \geq -3$ . Úlohu dělíme na dvě části:

- pro interval  $x \in \langle -33, -3 \rangle$  platí, že levá strana je záporná a pravá nezáporná, tedy nerovnice je splněna, pro všechna  $x \in \langle -33, -3 \rangle$ , tj.  $K_1 = \langle -33, -3 \rangle$
- pro interval  $x \in \langle -3, \infty \rangle$  jsou obě strany nerovnice nezáporné, proto umocníme:

$$(x + 3)^2 < x + 33$$

## Příklad:

Řešte nerovnici

$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna  $x \in \langle -33, \infty \rangle$ . Jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné můžeme umocnit na druhou. To platí pro  $x \geq -3$ . Úlohu dělíme na dvě části:

- pro interval  $x \in \langle -33, -3 \rangle$  platí, že levá strana je záporná a pravá nezáporná, tedy nerovnice je splněna, pro všechna  $x \in \langle -33, -3 \rangle$ , tj.  $K_1 = \langle -33, -3 \rangle$
- pro interval  $x \in \langle -3, \infty \rangle$  jsou obě strany nerovnice nezáporné, proto umocníme:

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 &< x + 33 \\ x^2 + 6x + 9 &< x + 33\end{aligned}$$

### Příklad:

Řešte nerovnici

$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna  $x \in \langle -33, \infty \rangle$ . Jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné můžeme umocnit na druhou. To platí pro  $x \geq -3$ . Úlohu dělíme na dvě části:

- pro interval  $x \in \langle -33, -3 \rangle$  platí, že levá strana je záporná a pravá nezáporná, tedy nerovnice je splněna, pro všechna  $x \in \langle -33, -3 \rangle$ , tj.  $K_1 = \langle -33, -3 \rangle$
- pro interval  $x \in \langle -3, \infty \rangle$  jsou obě strany nerovnice nezáporné, proto umocníme:

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 &< x + 33 \\ x^2 + 6x + 9 &< x + 33 \\ x^2 + 5x - 24 &< 0\end{aligned}$$

### Příklad:

Řešte nerovnici

$$x + 3 < \sqrt{x + 33}$$

Definiční obor rovnice jsou všechna  $x \in \langle -33, \infty \rangle$ . Jestliže jsou obě strany rovnice nezáporné můžeme umocnit na druhou. To platí pro  $x \geq -3$ . Úlohu dělíme na dvě části:

- pro interval  $x \in \langle -33, -3 \rangle$  platí, že levá strana je záporná a pravá nezáporná, tedy nerovnice je splněna, pro všechna  $x \in \langle -33, -3 \rangle$ , tj.  $K_1 = \langle -33, -3 \rangle$
- pro interval  $x \in \langle -3, \infty \rangle$  jsou obě strany nerovnice nezáporné, proto umocníme:

$$(x + 3)^2 < x + 33$$

$$x^2 + 6x + 9 < x + 33$$

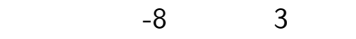
$$x^2 + 5x - 24 < 0$$

$$(x + 8)(x - 3) < 0$$

## Další typy nerovnic

Kořeny levé strany  $x_1 = -8$  a  $x_2 = 3$  rozdělí reálná čísla na tři intervaly

$$I_1 = (-\infty, -8), I_2 = (-8, 3), I_3 = (3, \infty)$$



## Další typy nerovnic

Kořeny levé strany  $x_1 = -8$  a  $x_2 = 3$  rozdělí reálná čísla na tři intervaly

$$I_1 = (-\infty, -8), I_2 = (-8, 3), I_3 = (3, \infty)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & -8 & & 3 & & \\ \hline x + 8 & - & | & + & | & + & \end{array}$$



## Další typy nerovnic

Kořeny levé strany  $x_1 = -8$  a  $x_2 = 3$  rozdělí reálná čísla na tři intervaly

$$I_1 = (-\infty, -8), I_2 = (-8, 3), I_3 = (3, \infty)$$

	-8	3
$x + 8$	-	+
$x - 3$	-	+

## Další typy nerovnic

Kořeny levé strany  $x_1 = -8$  a  $x_2 = 3$  rozdělí reálná čísla na tři intervaly

$$I_1 = (-\infty, -8), I_2 = (-8, 3), I_3 = (3, \infty)$$

	-8	3
$x + 8$	-	+
$x - 3$	-	+
	+	-

## Další typy nerovnic

Kořeny levé strany  $x_1 = -8$  a  $x_2 = 3$  rozdělí reálná čísla na tři intervaly

$$I_1 = (-\infty, -8), I_2 = (-8, 3), I_3 = (3, \infty)$$

	-8	3
$x + 8$	-	+
$x - 3$	-	+
	+	+

$$(-8, 3), \text{ tedy } K_2 = \langle -3, \infty \rangle \cap (-8, 3) = \langle -3, 3 \rangle$$

## Další typy nerovnic

Kořeny levé strany  $x_1 = -8$  a  $x_2 = 3$  rozdělí reálná čísla na tři intervaly

$$I_1 = (-\infty, -8), I_2 = (-8, 3), I_3 = (3, \infty)$$

	-8	3
$x + 8$	-	+
$x - 3$	-	+
	+	+

$(-8, 3)$ , tedy  $K_2 = \langle -3, \infty \rangle \cap (-8, 3) = \langle -3, 3 \rangle$

Sjednocením výsledků z bodu a) a bodu b) dostáváme závěr:

$$K = K_1 \cup K_2 = \langle -33, 3 \rangle.$$

**Příklad:**

Řešte nerovnici

$$\log_2(\log_3(\log_{0,5}(x))) > 0$$

**Příklad:**

Řešte nerovnici

$$\log_2(\log_3(\log_{0,5}(x))) > 0$$

Řešení získáme postupným odlogaritmováním:

### **Příklad:**

Řešte nerovnici

$$\log_2(\log_3(\log_{0,5}(x))) > 0$$

Řešení získáme postupným odlogaritmováním:

$$\log_3(\log_{0,5}(x)) > 2^0$$

$$\log_3 \log_{0,5} x > 1$$

### **Příklad:**

Řešte nerovnici

$$\log_2(\log_3(\log_{0,5}(x))) > 0$$

Řešení získáme postupným odlogaritmováním:

$$\log_3(\log_{0,5}(x)) > 2^0$$

$$\log_3 \log_{0,5} x > 1$$

Znaménko nerovnosti jsme neotáčeli, protože základ je větší než 1.  
Pokračujeme v odlogaritmování:



### Příklad:

Řešte nerovnici

$$\log_2(\log_3(\log_{0,5}(x))) > 0$$

Řešení získáme postupným odlogaritmováním:

$$\log_3(\log_{0,5}(x)) > 2^0$$

$$\log_3 \log_{0,5} x > 1$$

Znaménko nerovnosti jsme neotáčeli, protože základ je větší než 1.  
Pokračujeme v odlogaritmování:

$$\log_{0,5} x > 3^1$$

$$\log_{0,5} x > 3$$

Pokračujeme v odlogaritmování, tentokrát budeme nerovnost otáčet protože základ logaritmu je menší než 1.

Pokračujeme v odlogaritmování, tentokrát budeme nerovnost otáčet protože základ logaritmu je menší než 1.

$$x < (0,5)^3$$

$$x < 1/8$$

Pokračujeme v odlogaritmování, tentokrát budeme nerovnost otáčet protože základ logaritmu je menší než 1.

$$x < (0,5)^3$$

$$x < 1/8$$

Zbývá ověřit pro jaká  $x$  je levá strana nerovnice definovaná - argumenty všech logaritmů musí být kladné.

Pokračujeme v odlogaritmování, tentokrát budeme nerovnost otáčet protože základ logaritmu je menší než 1.

$$x < (0,5)^3$$

$$x < 1/8$$

Zbývá ověřit pro jaká  $x$  je levá strana nerovnice definovaná - argumenty všech logaritmů musí být kladné. Tedy  $x > 0$  navíc  $\log_{0,5} x > 0$  a  $\log_3 (\log_{0,5} x) > 0$ .

Pokračujeme v odlogaritmování, tentokrát budeme nerovnost otáčet protože základ logaritmu je menší než 1.

$$x < (0,5)^3$$

$$x < 1/8$$

Zbývá ověřit pro jaká  $x$  je levá strana nerovnice definovaná - argumenty všech logaritmů musí být kladné. Tedy  $x > 0$  navíc  $\log_{0,5} x > 0$  a  $\log_3 (\log_{0,5} x) > 0$ .

Závěr: všechna  $x$  z intervalu  $(0, 1/8)$  splňují nerovnici výše.