

# Soustavy lineárních rovnic a matice

Lukáš Kokrda

Ekonomicko správní fakulta  
Masarykova Universita

podzim 2020

- Soustavy lineárních rovnic
  - Typy soustav
  - Metody řešení
- Matice
  - Základní pojmy (zápis, vektor, speciální typy matic, symetrická matice)
  - Operace s maticemi (rovnost, sčítání, násobení, transponování)
  - Determinant matice
  - Řešení soustav rovnic pomocí matic

- Jaký je geometrický význam rovnice?

- Jaký je geometrický význam rovnice?  
„Najít průsečík dvou grafů.“

- Jaký je geometrický význam rovnice?  
„Najít průsečík dvou grafů.“

$$f(x) = g(x)$$

- Jaký je geometrický význam rovnice?  
„Najít průsečík dvou grafů.“

$$f(x) = g(x)$$

- Jak ale najít bod (oblast), která by splňovala více podmínek?

- Jaký je geometrický význam rovnice?  
„Najít průsečík dvou grafů.“

$$f(x) = g(x)$$

- Jak ale najít bod (oblast), která by splňovala více podmínek?
  - Více rovnic nejde dát do vzájemné rovnosti.

- Jaký je geometrický význam rovnice?  
„Najít průsečík dvou grafů.“

$$f(x) = g(x)$$

- Jak ale najít bod (oblast), která by splňovala více podmínek?
  - Více rovnic nejde dát do vzájemné rovnosti.
  - Ale lze několik rovnic řešit současně.



- Jaký je geometrický význam rovnice?  
„Najít průsečík dvou grafů.“

$$f(x) = g(x)$$

- Jak ale najít bod (oblast), která by splňovala více podmínek?
  - Více rovnic nejde dát do vzájemné rovnosti.
  - Ale lze několik rovnic řešit současně.
  - Takzvanou soustavu rovnic.

- Jaký je geometrický význam rovnice?  
„Najít průsečík dvou grafů.“

$$f(x) = g(x)$$

- Jak ale najít bod (oblast), která by splňovala více podmínek?
  - Více rovnic nejde dát do vzájemné rovnosti.
  - Ale lze několik rovnic řešit současně.
  - Takzvanou soustavu rovnic.
- Omezíme se pouze na lineární rovnice.

- Jaký je geometrický význam rovnice?  
„Najít průsečík dvou grafů.“

$$f(x) = g(x)$$

- Jak ale najít bod (oblast), která by splňovala více podmínek?
  - Více rovnic nejde dát do vzájemné rovnosti.
  - Ale lze několik rovnic řešit současně.
  - Takzvanou soustavu rovnic.
- Omezíme se pouze na lineární rovnice.
  - (Pomocí numerických metod lze každá rovnice převést na opakované řešení lineárních rovnic.)

## Soustava lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + & \cdots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  koeficienty
- $x_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  neznámé (pro malá  $n$ ,  $x$ ,  $y$  a  $z$ )
- $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, m$  koeficienty pravých stran
- $n \in \mathbb{N}$  počet neznámých
- $m \in \mathbb{N}$  počet rovnic

- Počet řešení:
  - Žádné řešení
  - Jedno řešení
  - Nekonečně mnoho řešení („určitého tvaru“)
- Bohužel toto nejde na první pohled jednoznačně určit.

- Počet řešení:
  - Žádné řešení
  - Jedno řešení
  - Nekonečně mnoho řešení („určitého tvaru“)
- Bohužel toto nejde na první pohled jednoznačně určit.

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2y_1 & + & z_1 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2y_1 & + & 3z_1 & = & 4 \\ x_1 & + & & & z_1 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 4y_1 & & & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} x_2 & + & y_2 & - & z_2 & = & 1 \\ 2x_2 & + & 2y_2 & - & 4z_2 & = & 2 \\ x_2 & + & y_2 & + & z_2 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} x_3 & + & y_3 & - & z_3 & = & 1 \\ 2x_3 & + & 2y_3 & - & 4z_3 & = & 2 \\ & & & & z_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} [x_1; y_1; z_1] & = & [3; \frac{1}{2}; -1] \\ [x_2; y_2; z_2] & = & [t; 1 - t; 0], t \in \mathbb{R} \\ [x_3; y_3; z_3] & = & \text{Nemá klasické řešení.} \end{array}$$

- Homogenní  $\times$  Nehomogenní soustava

- Homogenní  $\times$  Nehomogenní soustava
- Přeurčená soustava



- Homogenní  $\times$  Nehomogenní soustava
- Přeurčená soustava
- Nedourčená soustava

- Homogenní × Nehomogenní soustava
  - Homogenní soustava má na všech pravých stranách jen 0
- Přeurčená soustava
- Nedourčená soustava

- Homogenní  $\times$  Nehomogenní soustava
  - Homogenní soustava má na všech pravých stranách jen 0
  - Homogenní rovnice má vždy alespoň triviální řešení
- Přeurčená soustava
  
- Nedourčená soustava

- Homogenní  $\times$  Nehomogenní soustava
  - Homogenní soustava má na všech pravých stranách jen 0
  - Homogenní rovnice má vždy alespoň triviální řešení
- Přeurčená soustava
  - Je soustava, která má více rovnic než proměnných
  
- Nedourčená soustava

- Homogenní  $\times$  Nehomogenní soustava
  - Homogenní soustava má na všech pravých stranách jen 0
  - Homogenní rovnice má vždy alespoň triviální řešení
- Přeurčená soustava
  - Je soustava, která má více rovnic než proměnných
  - „Nemívá klasické řešení, ale řešení ve smyslu nejmenších čtverců.“
- Nedourčená soustava

- Homogenní  $\times$  Nehomogenní soustava
  - Homogenní soustava má na všech pravých stranách jen 0
  - Homogenní rovnice má vždy alespoň triviální řešení
- Přeurčená soustava
  - Je soustava, která má více rovnic než proměnných
  - „Nemívá klasické řešení, ale řešení ve smyslu nejmenších čtverců.“
- Nedourčená soustava
  - Má méně rovnic než proměnných

- Homogenní  $\times$  Nehomogenní soustava
  - Homogenní soustava má na všech pravých stranách jen 0
  - Homogenní rovnice má vždy alespoň triviální řešení
- Přeurčená soustava
  - Je soustava, která má více rovnic než proměnných
  - „Nemívá klasické řešení, ale řešení ve smyslu nejmenších čtverců.“
- Nedourčená soustava
  - Má méně rovnic než proměnných
  - „Mívá nekonečně mnoho řešení, která se zapisují pomocí volitelných parametrů.“

• a)

$$x + y + z = 0$$

$$x - y + z = 0$$

• b)

$$x + y + z = 0$$

$$x - y - z = 1$$

$$2x - y + z = 0$$

• c)

$$x + y + z = -1$$

$$x - y - z = 3$$

$$x - 2y - z = 2$$

$$2x - y + z = 1$$



# Klasifikace lineárních rovnic

- a) Nedourčená homogenní soustava (dvou rovnic o třech neznámých)

$$x + y + z = 0$$

$$x - y + z = 0$$

- b)

$$x + y + z = 0$$

$$x - y - z = 1$$

$$2x - y + z = 0$$

- c)

$$x + y + z = -1$$

$$x - y - z = 3$$

$$x - 2y - z = 2$$

$$2x - y + z = 1$$

# Klasifikace lineárních rovnic

- a) Nedourčená homogenní soustava (dvou rovnic o třech neznámých)

$$x + y + z = 0$$

$$x - y + z = 0$$

- b) Nehomogenní soustava (tří rovnic o třech neznámých)

$$x + y + z = 0$$

$$x - y - z = 1$$

$$2x - y + z = 0$$

- c)

$$x + y + z = -1$$

$$x - y - z = 3$$

$$x - 2y - z = 2$$

$$2x - y + z = 1$$

# Klasifikace lineárních rovnic

- a) Nedourčená homogenní soustava (dvou rovnic o třech neznámých)

$$x + y + z = 0$$

$$x - y + z = 0$$

- b) Nehomogenní soustava (tří rovnic o třech neznámých)

$$x + y + z = 0$$

$$x - y - z = 1$$

$$2x - y + z = 0$$

- c) Přeurčená homogenní soustava (čtyř rovnic o třech neznámých)

$$x + y + z = -1$$

$$x - y - z = 3$$

$$x - 2y - z = 2$$

$$2x - y + z = 1$$

- Sčítací metoda

- Sčítací metoda
  
- Dosazovací metoda

- Sčítací metoda
- Dosazovací metoda
- Metody pomocí matic

- Sčítací metoda, postup:
- Dosazovací metoda
- Metody pomocí matic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezůstane poslední proměnná.
- Dosazovací metoda
- Metody pomocí matic



- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda
  
- Metody pomocí matic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
  
  
  
  
  
  
  
  
  
  
- Metody pomocí matic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
  - 1) Vyjádřit z první rovnice proměnnou  $x_1$  pomocí zbylých proměnných.
  
- Metody pomocí matic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
  - 1) Vyjádřit z první rovnice proměnnou  $x_1$  pomocí zbylých proměnných.
  - 2) Dosadit získaný vztah do zbylých rovnic.
- Metody pomocí matic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
  - 1) Vyjádřit z první rovnice proměnnou  $x_1$  pomocí zbylých proměnných.
  - 2) Dosadit získaný vztah do zbylých rovnic.
  - 3) Opakovat krok 1) a 2) pro ostatní proměnné.
- Metody pomocí matic

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
  - 1) Vyjádřit z první rovnice proměnnou  $x_1$  pomocí zbylých proměnných.
  - 2) Dosadit získaný vztah do zbylých rovnic.
  - 3) Opakovat krok 1) a 2) pro ostatní proměnné.
- Metody pomocí matic (aby jste věděli na co se těšit)

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
  - 1) Vyjádřit z první rovnice proměnnou  $x_1$  pomocí zbylých proměnných.
  - 2) Dosadit získaný vztah do zbylých rovnic.
  - 3) Opakovat krok 1) a 2) pro ostatní proměnné.
- Metody pomocí matic (aby jste věděli na co se těšit)
  - Gaussova eliminační metoda

- Sčítací metoda, postup:
  - 1) Vhodným přičítáním násobků jednotlivých rovnic redukovat jednotlivé proměnné, dokud nezbude poslední proměnná.
  - 2) Vypočtené proměnnou postupně dosazovat do redukovaných rovnic.
- Dosazovací metoda, postup:
  - 1) Vyjádřit z první rovnice proměnnou  $x_1$  pomocí zbylých proměnných.
  - 2) Dosadit získaný vztah do zbylých rovnic.
  - 3) Opakovat krok 1) a 2) pro ostatní proměnné.
- Metody pomocí matic (aby jste věděli na co se těšit)
  - Gaussova eliminační metoda
  - Cramerovo pravidlo



# Sčítací metoda

$$\begin{array}{rccccrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & & & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

# Sčítací metoda

$$\begin{array}{rccccrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 & & x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 & \Rightarrow & - & 2y & + & z & = & -2 \\ x & + & & & z & = & 2 & & - & 2y & & & = & -1 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 & & & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

# Sčítací metoda

$$\begin{array}{rclcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 & & x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 & \Rightarrow & - & 2y & + & z & = & -2 \\ x & + & & & z & = & 2 & & - & 2y & & & = & -1 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 & & & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rclcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & & & - & z & = & 1 \\ & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

# Sčítací metoda

$$\begin{array}{rclcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 & & x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 & \Rightarrow & - & 2y & + & z & = & -2 \\ x & + & & & z & = & 2 & & - & 2y & & & = & -1 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 & & & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} & x & + & 2y & + & z & = & 3 & & x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ \Rightarrow & & - & 2y & + & z & = & -2 & \Rightarrow & & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & & & & - & z & = & 1 & & & & & - & z & = & 1 \\ & & & & - & 2z & = & 2 & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 & & x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 & \Rightarrow & - & 2y & + & z & = & -2 \\ x & + & & & z & = & 2 & & - & 2y & & & = & -1 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 & & & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcrcl} & x & + & 2y & + & z & = & 3 & & x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ \Rightarrow & & - & 2y & + & z & = & -2 & \Rightarrow & & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & & & - & z & = & 1 & & & & & - & z & = & 1 \\ & & & - & 2z & = & 2 & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} \Rightarrow & & & z & = & -1 \\ & - & 2y & & = & -2 - z \\ & x & & & = & 3 - 2y - z \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = 3 \end{array}$$

# Dosazovací metoda

$$\begin{array}{rclclcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & & & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

# Dosazovací metoda

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 & \Rightarrow & x = 3 - 2y - z \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & & & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

# Dosazovací metoda

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 3 &\Rightarrow x &= 3 - 2y - z \\2x + 2y + 3z &= 4 \\x + z &= 2 \\2x + 4y &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2(3 - 2y - z) + 2y + 3z &= 4 \\3 - 2y - z + z &= 2 \\2(3 - 2y - z) + 4y &= 8\end{aligned}$$



# Dosazovací metoda

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 3 &\Rightarrow x &= 3 - 2y - z \\2x + 2y + 3z &= 4 \\x + z &= 2 \\2x + 4y &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2(3 - 2y - z) + 2y + 3z &= 4 \\3 - 2y - z + z &= 2 \\2(3 - 2y - z) + 4y &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}- 2y + z &= -2 \\- 2y &= -1 \\- 2z &= 2\end{aligned}$$

# Dosazovací metoda

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 & \Rightarrow & x = 3 - 2y - z \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ x & + & & & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 2(3 - 2y - z) & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3 - 2y - z & + & & & z & = & 2 \\ 2(3 - 2y - z) & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} - & 2y & + & z & = & -2 \\ - & 2y & + & & = & -1 & \Rightarrow & y = \frac{1}{2} \\ & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 3 \Rightarrow x = 3 - 2y - z \\2x + 2y + 3z &= 4 \\x + z &= 2 \\2x + 4y &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2(3 - 2y - z) + 2y + 3z &= 4 \\3 - 2y - z + z &= 2 \\2(3 - 2y - z) + 4y &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}- 2y + z &= -2 \\- 2y + &= -1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\- 2z &= 2 \Rightarrow z = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 3 \Rightarrow x = 3 - 2y - z \\2x + 2y + 3z &= 4 \\x + z &= 2 \\2x + 4y &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2(3 - 2y - z) + 2y + 3z &= 4 \\3 - 2y - z + z &= 2 \\2(3 - 2y - z) + 4y &= 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-2y + z &= -2 \Rightarrow -2 \cdot \frac{1}{2} + (-1) = -2 \\-2y &= -1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\-2z &= 2 \Rightarrow z = -1\end{aligned}$$

# Dosazovací metoda

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 & \Rightarrow & x = 3 - 2y - z \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 & & x = 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} - (-1) \\ x & + & & & z & = & 2 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 2(3 - 2y - z) & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3 - 2y - z & + & & & z & = & 2 \\ 2(3 - 2y - z) & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} - 2y & + & z & = & -2 & \Rightarrow & -2 \cdot \frac{1}{2} + (-1) = -2 \\ - 2y & + & & = & -1 & \Rightarrow & y = \frac{1}{2} \\ & - & 2z & = & 2 & \Rightarrow & z = -1 \end{array}$$

# Dosazovací metoda

$$\begin{array}{rclcl} x & + & 2y & + & z & = & 3 & \Rightarrow & x = 3 - 2y - z \\ 2x & + & 2y & + & 3z & = & 4 & & x = 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} - (-1) \\ x & + & & & z & = & 2 & & x = 3 \\ 2x & + & 4y & & & = & 8 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} 2(3 - 2y - z) & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 3 - 2y - z & + & & & z & = & 2 \\ 2(3 - 2y - z) & + & 4y & & & = & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclcl} - 2y & + & z & = & -2 & \Rightarrow & -2 \cdot \frac{1}{2} + (-1) = -2 \\ - 2y & + & & = & -1 & \Rightarrow & y = \frac{1}{2} \\ & - & 2z & = & 2 & \Rightarrow & z = -1 \end{array}$$

- Maticí řádu  $m \times n$  nazýváme obdélníkové schéma reálných čísel o  $m$  řádcích a  $n$  sloupcích.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Maticе značíme většinou velkými tučnými písmeny
- Řádky matice číslujeme shora
- Sloupce matice číslujeme zleva
- Čísla v matici nazýváme prvky matice
- Prvky matice označujeme odpovídajícími malými písmeny s řádkovým a sloupcovým indexem

- Matice o jednom řádku/sloupci nazýváme **vektory**
- Vektory většinou značíme malými tučnými písmeny

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = ( 1 \quad -2 \quad 2 )$$

- Matici o  $n$  řádcích a  $n$  sloupcích nazveme **čtvercovou** maticí řádu  $n$
- Prvky  $a_{ii}$  matice **A** (prvky jejichž řádkový a sloupcový index se rovná) nazýváme diagonálními prvky
- Všechny diagonální prvky matice **A** nazýváme hlavní diagonálou



- **Jednotková matice** - čtvercová matice, která má na hlavní diagonále 1 a ostatní prvky jsou 0. Značení **E**, nebo **I**, pokud chceme zdůraznit řád matice pak **E<sub>n</sub>**, nebo **I<sub>n</sub>**

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matice ve **schodovitém tvaru**, je matice jejíž každý řádek začíná větším počtem 0 než řádek předcházející.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **Symetrická matice** je matice jejíž prvky splňují podmínku

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, a_{ij} = a_{ji}$$

- Příklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Protipříklad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Rovnost matic

- Matice se rovnají pokud jsou stejného řádu a odpovídající prvky se rovnají

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \neq \mathbf{B} \text{ a } \mathbf{A} \neq \mathbf{C}$$

- Sčítání matic

- Matice lze sčítat, pokud jsou stejného řádu a výsledné prvky matice jsou součty odpovídajících si prvků původních matic.

$$\mathbf{A} + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 2 + (-3) \\ -3 + 2 & 0 + 1 \\ 0 + 6 & 0 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

- Odčítání analogicky

# Násobení matic

- Násobení konstantou  $c \in \mathbb{R}$ 
  - každý prvek se vynásobí konstantou  $c$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, 4 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu  $m \times n$  lze zprava vynásobit maticí řádu  $n \times o$ , výsledná matice je řádu  $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

# Násobení matic

- Násobení konstantou  $c \in \mathbb{R}$ 
  - každý prvek se vynásobí konstantou  $c$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, 4 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu  $m \times n$  lze zprava vynásobit maticí řádu  $n \times o$ , výsledná matice je řádu  $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

# Násobení matic

- Násobení konstantou  $c \in \mathbb{R}$ 
  - každý prvek se vynásobí konstantou  $c$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, 4 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu  $m \times n$  lze zprava vynásobit maticí řádu  $n \times o$ , výsledná matice je řádu  $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

# Násobení matic

- Násobení konstantou  $c \in \mathbb{R}$ 
  - každý prvek se vynásobí konstantou  $c$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, 4 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu  $m \times n$  lze zprava vynásobit maticí řádu  $n \times o$ , výsledná matice je řádu  $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

# Násobení matic

- Násobení konstantou  $c \in \mathbb{R}$ 
  - každý prvek se vynásobí konstantou  $c$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, 4 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu  $m \times n$  lze zprava vynásobit maticí řádu  $n \times o$ , výsledná matice je řádu  $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & & \end{pmatrix}$$



# Násobení matic

- Násobení konstantou  $c \in \mathbb{R}$ 
  - každý prvek se vynásobí konstantou  $c$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, 4 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu  $m \times n$  lze zprava vynásobit maticí řádu  $n \times o$ , výsledná matice je řádu  $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

# Násobení matic

- Násobení konstantou  $c \in \mathbb{R}$ 
  - každý prvek se vynásobí konstantou  $c$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, 4 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu  $m \times n$  lze zprava vynásobit maticí řádu  $n \times o$ , výsledná matice je řádu  $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

# Násobení matic

- Násobení konstantou  $c \in \mathbb{R}$ 
  - každý prvek se vynásobí konstantou  $c$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, 4 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu  $m \times n$  lze zprava vynásobit maticí řádu  $n \times o$ , výsledná matice je řádu  $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & & \end{pmatrix}$$

# Násobení matic

- Násobení konstantou  $c \in \mathbb{R}$ 
  - každý prvek se vynásobí konstantou  $c$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, 4 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu  $m \times n$  lze zprava vynásobit maticí řádu  $n \times o$ , výsledná matice je řádu  $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

# Násobení matic

- Násobení konstantou  $c \in \mathbb{R}$ 
  - každý prvek se vynásobí konstantou  $c$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, 4 \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 & 4 \cdot (-1) \\ 4 \cdot (-1) & 4 \cdot 2 \\ 4 \cdot 1 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Násobení matic
  - Matici řádu  $m \times n$  lze zprava vynásobit maticí řádu  $n \times o$ , výsledná matice je řádu  $m \times o$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) \\ 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

- Násobení matic není komutativní  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)) = 2$$

- Jednoprvková matice je „číslo“

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte  $A \cdot B$

# Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte  $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$$

Proveďte  $B \cdot A$



# Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte  $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

Proveďte  $B \cdot A$

# Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte  $A \cdot B$

$$\left( \begin{array}{ccc} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc} & & \end{array} \right)$$

Proveďte  $B \cdot A$

# Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte  $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ -2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

Proveďte  $B \cdot A$

# Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte  $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ -2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Proveďte  $B \cdot A$

# Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte  $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ -2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -5 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Proveďte  $B \cdot A$

# Násobení matic - příklady

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proveďte  $A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ -2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 & -2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & -2 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -5 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Proveďte  $B \cdot A$  Nelze

- Transponování matic

- „Prohození indexů u prvků matic.“
- $\mathbf{A} = (a_{ij})$ , transponovaná matice  $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$
- Příklad:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Vztahy pro transponování matic

- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$

- **Determinant** je číslo přiřazené matici, které je definované jen pro čtvercové matice
  - značení  $|\mathbf{A}|$ ,  $\det(\mathbf{A})$
  - podle hodnoty determinantu rozděluje na **singulární** ( $|\mathbf{A}| = 0$ ) a **regulární** ( $|\mathbf{A}| \neq 0$ )
  - ukazují zda jsou řádky/sloupce matice nezávislé (kombinací ostatních řádků/sloupců)
  - **singulární** matice má závislé řádky/sloupce

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu  $2 \times 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

- Matice řádu  $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Nelze použít na větší matice!

## Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu  $2 \times 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2$$

- Matice řádu  $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Nelze použít na větší matice!

## Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu  $2 \times 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1))$$

- Matice řádu  $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Nelze použít na větší matice!

## Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu  $2 \times 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1))$$

- Matice řádu  $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Nelze použít na větší matice!

## Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu  $2 \times 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1)) = 4 - (-3) = 7$$

- Matice řádu  $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

- Nelze použít na větší matice!

## Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu  $2 \times 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1)) = 4 - (-3) = 7$$

- Matice řádu  $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

- Nelze použít na větší matice!

## Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu  $2 \times 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1)) = 4 - (-3) = 7$$

- Matice řádu  $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

- Nelze použít na větší matice!

## Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu  $2 \times 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1)) = 4 - (-3) = 7$$

- Matice řádu  $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot 3 \\ - (0 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) =$$

- Nelze použít na větší matice!



## Sarrusovo pravidlo

- Matice řádu  $2 \times 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot (-1)) = 4 - (-3) = 7$$

- Matice řádu  $3 \times 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \cdot 3 - \\ - (0 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) = \\ = 1 + 0 - 3 - (0 + 6 - 2) = -2 - 4 = -6$$

- Nelze použít na větší matice!

# Vlastnosti determinantu

- Záměna řádku/sloupce
  - Po výměně dvou řáďů se změní znaménko determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Vynásobení řádku konstantou
  - Po vynásobení řádku matice **A** konstantou  $c$  se determinant nové matice rovná  $c \cdot |\mathbf{A}|$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Hodnota determinantu se nezmění pokud k řádku přičteme násobek jiného řádku

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

# Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (2 \cdot 0 \cdot 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

# Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3$$

# Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (2 \cdot 1 \cdot (-1))$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-2))$$

# Determinanty-Příklady

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 3 - (-1 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - (2 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 2) = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (2 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-2)) = 0$$

- Značení -  $h(\mathbf{A})$
- Udává počet lineárně nezávislých řádků
- Hodnost matice zjistíme převedením matice na schodovitý tvar pomocí ekvivalentních řádkových úprav na schodovitý tvar, počet nenulových řádků udává hodnost matice
  - Mezi elementární řádkové úpravy patří:
    - Výměna pořadí řádků
    - Vynásobení řádku konstantou
    - Přičítání / odčítání dvou řádků matice



# Hodnost matice - příklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} -4 \cdot [1] \\ -7 \cdot [1] \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \cdot [2] \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnost matice  $h(\mathbf{A}) = 2$

- Soustavy lineárních rovnic je možné zapsat pomocí **rozšířené matice**

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

- Zkráceně  $(\tilde{\mathbf{A}})$
- Metody řešení
  - Gaussova eliminační metoda (univerzální, ekvivalent součtové metody)
  - Cramerovo pravidlo (jen v případech, kdy matice  $\mathbf{A}$  je čtvercová)

Soustava má (alespoň jedno) řešení právě tehdy, když se hodnost matice  $h(\mathbf{A})$  rovná hodnosti rozšířené matice soustavy  $h(\tilde{\mathbf{A}})$ , tedy když:

- 1 Soustava s  $n$  neznámými má jediné řešení právě tehdy, když platí

$$h(\mathbf{A}) = h(\tilde{\mathbf{A}}) = n$$

- 2 Soustava s  $n$  neznámými nemá žádné řešení právě tehdy, když platí

$$h(\mathbf{A}) \neq h(\tilde{\mathbf{A}})$$

- 3 Soustava s  $n$  neznámými má nekonečně mnoho řešení právě tehdy, když platí

$$h(\mathbf{A}) = h(\tilde{\mathbf{A}}) < n$$

Řešení existuje nekonečně mnoho závislých na  $(n - h(\tilde{\mathbf{A}}))$  parametrech.

# Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right)$$

# Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \quad -2 \cdot [1]$$

# Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2 \cdot [1] \\ +1 \cdot [1] \end{array}$$

# Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2 \cdot [1] \\ +1 \cdot [1] \end{array} \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right)$$

# Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) +1 \cdot [2]$$



# Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right) +1 \cdot [2]$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

# Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Zbývá postup jako u sčítací metody.

# Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Zbývá postup jako u sčítací metody.

$$2x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1$$

# Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Zbývá postup jako u sčítací metody.

$$2x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1$$

$$-3x_2 - 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -1$$

# Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Zbývá postup jako u sčítací metody.

$$2x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1$$

$$-3x_2 - 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 + (-1) + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 2$$

# Gaussova eliminační metoda - příklad

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right)$$
$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Zbývá postup jako u sčítací metody.

$$2x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1$$

$$-3x_2 - 2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$x_1 + (-1) + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$[x_1; x_2; x_3] = [2; -1; 1]$$

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}), \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right)$$

- Metoda spočívá v postupném počítání determinantů

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}, x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|}, x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3|}{|\mathbf{A}|}$$

- Kde matice  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$  vzniknou záměnou pravé strany (vektoru  $\mathbf{b}$ ) za sloupec s odpovídajícím indexem

$$\mathbf{A}_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

# Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$



# Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) =$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

# Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

# Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) =$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

# Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) = -12$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

# Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) = -12$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + (-2) + 0 - (-5 + 0 + 12) =$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

# Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) = -12$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + (-2) + 0 - (-5 + 0 + 12) = 6$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

# Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) = -12$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + (-2) + 0 - (-5 + 0 + 12) = 6$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + (-5) - (2 + 10 + (-2)) =$$

# Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) = -12$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + (-2) + 0 - (-5 + 0 + 12) = 6$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + (-5) - (2 + 10 + (-2)) = -6$$



# Cramerovo pravidlo - dopočítání

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 + 0 - (1 + 0 + 6) = -6$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 10 + 0 - (1 + 0 + 15) = -12$$

$$|\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + (-2) + 0 - (-5 + 0 + 12) = 6$$

$$|\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 8 + (-5) - (2 + 10 + (-2)) = -6$$

$$x_1 = \frac{-12}{-6} = 2; \quad x_2 = \frac{6}{-6} = -1; \quad x_3 = \frac{-6}{-6} = 1$$

# Řešený příklad - parametr

Řešte soustavu rovnic

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

# Řešený příklad - parametr

Řešte soustavu rovnic

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

Schodovitý tvar matice

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

# Řešený příklad - parametr

Řešte soustavu rovnic

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

Schodovitý tvar matice

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Hodnost matice  $h(\mathbf{A}) = h(\tilde{\mathbf{A}}) = 2$ , tedy soustava má řešení

# Řešený příklad - parametr

Řešte soustavu rovnic

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

Schodovitý tvar matice

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Hodnost matice  $h(\mathbf{A}) = h(\tilde{\mathbf{A}}) = 2$ , tedy soustava má řešení  
Proměnné jsou 3, je potřeba zvolit  $3-2=1$  parametr, parametr  
volíme na řádku, kde „přibylo“ více proměnných než 1 (tedy  $y$ ,  
nebo  $z$ )

$$z = t \in \mathbb{R} \rightarrow y = 1 + t$$

$$x - (1 + t) + 2t = 3 \rightarrow x = 4 - t$$