Posloupnosti a úvod do kombinatoriky

Lukáš Kokrda

Ekonomicko správní fakulta
Masarykova Universita

podzim 2020

Co je posloupnost

Posloupnost je určité pravidlo, podle kterého přiřazujeme přirozeným číslům jiná čísla, která nemusí nutně být přirozená.

Tématický příklad. Vezměme si posloupnost čísel

$$\{1, 3, 5, 7, \dots\}.$$

Snadno rozpoznáme pravidlo, které stanovuje členy posloupnosti a podle tohoto pravidla můžeme sestavit tabulku

$$\begin{array}{ccc} 1 & \to & 1 \\ 2 & \to & 3 \\ 3 & \to & 5 \\ 4 & \to & 7 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Co je posloupnost

Zůstaneme-li u zobrazení, pak můžeme říci, že posloupnost a je zobrazení přirozených čísel do množiny čísel reálných, tj. $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Důležitá poznámka

Posloupnost je každé zobrazení a, jehož definičním oborem jsou přirozená čísla a oborem hodnot je část množiny reálných čísel. Tedy $\mathcal{D}(a) = \mathbb{N}$ a $\mathcal{H}(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Stejně jako u přirozených čísel je přesně stanoveno, jak jdou po sobě, tak i posloupnost má pevně stanovené pořadí.

Značení posloupnosti

Výše jsme si řekli, že **posloupnost** je druhem zobrazení, která obvykle značíme $f(n)$. Přesto se u těchto speciálních zobrazení dělá „výjimka“ a **posloupnosti značíme**

$$a_n.$$

V různé literatuře, či na internetu, se můžeme setkat i se značením jiným, jako je například:

- (a_n),
- $\{a_n\}$,
- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Zadání posloupnosti

Posloupnosti, stejně jako mnohá jiná zobrazení, mohou být zadány více způsoby:

Zadání posloupnosti

Posloupnosti, stejně jako mnohá jiná zobrazení, mohou být zadány více způsoby:

- **Výčtem členů,**
  např.$\{1, 2, 1, 2, \dots\}$

Zadání posloupnosti

Posloupnosti, stejně jako mnohá jiná zobrazení, mohou být zadány více způsoby:

- **Výčtem členů,**
  např.$\{1, 2, 1, 2, \dots\}$
- **Rekurentním vzorcem,**
  např. $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 1$ nebo
  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$

Zadání posloupnosti

Posloupnosti, stejně jako mnohá jiná zobrazení, mohou být zadány více způsoby:

- **Výčtem členů,**
  např.$\{1, 2, 1, 2, \dots\}$
- **Rekurentním vzorcem,**
  např. $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 1$ nebo
  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$
- **Explicitním vzorcem pro n-tý člen,**
  např. $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_n = n!$, $a_n = (-1)^n$

Zadání posloupnosti

Posloupnosti, stejně jako mnohá jiná zobrazení, mohou být zadány více způsoby:

- **Výčtem členů,**
  např.$\{1, 2, 1, 2, \dots\}$
- **Rekurentním vzorcem,**
  např. $a_{n+1} = a_n + 2$, $a_1 = 1$ nebo
  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = a_2 = 1$
- **Explicitním vzorcem pro n-tý člen,**
  např. $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_n = n!$, $a_n = (-1)^n$

V předešlých příkladech jsme se již setkali se zadáním posloupnosti. Uvedenému způsobu říkáme **pomocí výčtu členů.** Správně bychom měli říci, že jsme zadali posloupnosti pomocí výčtu prvních několika členů.

Úkol:

Zadejte posloupnost lichých čísel $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

Úkol:

Zadejte posloupnost lichých čísel $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

1. rekurentním vzorcem,

Úkol:

Zadejte posloupnost lichých čísel $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

1. rekurentním vzorcem,

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

Posloupnosti zadané rekurentně a explicitně

Úkol:

Zadejte posloupnost lichých čísel $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

1. rekurentním vzorcem,

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

2. explicitním vzorcem.

Posloupnosti zadané rekurentně a explicitně

Úkol:

Zadejte posloupnost lichých čísel $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

1. rekurentním vzorcem,

$$a_{n+1} = a_n + 2$$

2. explicitním vzorcem.

$$a_n = -1 + 2n$$

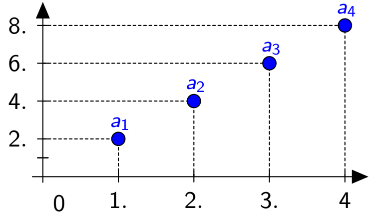
Vlastnosti posloupností

Již jsme řekli, že **posloupnost** je **speciálním druhem zobrazení** jehož definičním oborem jsou přirozená čísla (nebo jejich část). Proto vlastnosti posloupností budou **podobné** jako vlastnosti funkcí

Monotonie - tendence chování posloupnosti s každým dalším členem

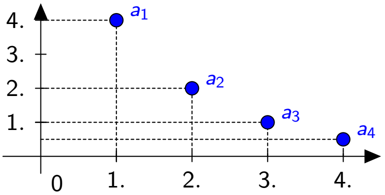
- rostoucí,
- klesající,
- nerostoucí,
- neklesající.

Rostoucí posloupnost



První čtyři členy posloupnosti $a_n = 2 \cdot n$.

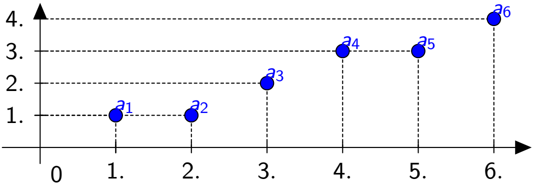
Klesající posloupnost:



První čtyři členy posloupnosti $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$, $a_1 = 4$.

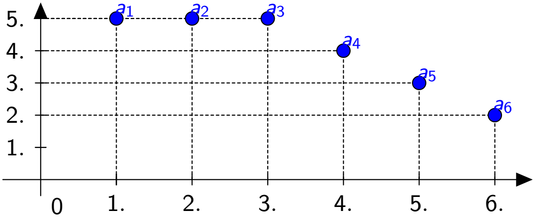
Momotonie

Neklesající



Prvních šest členů posloupnosti $a_n = \{1, 1, 2, 3, 3, 4, \dots\}$.

Nerostoucí posloupnost:



Prvních šest členů posloupnosti $a_n = \{5, 5, 5, 4, 3, 2, 1, \dots\}$.

Omezenost

Ohraničenost nám u posloupností udává informaci o tom, zda má posloupnost nějakou mez.

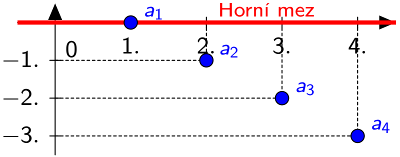
Například posloupnost, která pro žádný člen nenabývá hodnoty menší než nula. Pak o takové posloupnosti řekneme, že je zdola ohraničená.

Rozlišujeme tyto případy ohraničenosti:

- shora ohraničená,
- zdola ohraničená,
- ohraničená (současně zdola i shora),
- neohraničená.

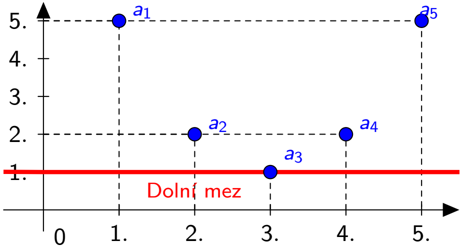
Omezenost

Shora ohraničená:



Shora ohraničená posloupnost $a_n = 1 - n$.

Zdola ohraničená:



Zdola ohraničená posloupnost $a_n = (n-3)^2 + 1$.

Existuje více druhů posloupností:

Speciální posloupnosti

Existuje více druhů posloupností:

1. aritmetická posloupnost, $a_n = a_0 + n \cdot d$

Speciální posloupnosti

Existuje více druhů posloupností:

1. aritmetická posloupnost, $a_n = a_0 + n \cdot d$
2. geometrická posloupnost, $a_n = a_0 \cdot q^n$

Speciální posloupnosti

Existuje více druhů posloupností:

1. aritmetická posloupnost, $a_n = a_0 + n \cdot d$
2. geometrická posloupnost, $a_n = a_0 \cdot q^n$
3. Fibonacciho posloupnost, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = 1,\ a_2 = 1$

Speciální posloupnosti

Existuje více druhů posloupností:

1. aritmetická posloupnost, $a_n = a_0 + n \cdot d$
2. geometrická posloupnost, $a_n = a_0 \cdot q^n$
3. Fibonacciho posloupnost, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = 1,\ a_2 = 1$
4. harmonická posloupnost, $a_n = \frac{1}{a_0 + n \cdot d}$

Speciální posloupnosti

Existuje více druhů posloupností:

1. aritmetická posloupnost, $a_n = a_0 + n \cdot d$
2. geometrická posloupnost, $a_n = a_0 \cdot q^n$
3. Fibonacciho posloupnost, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = 1,\ a_2 = 1$
4. harmonická posloupnost, $a_n = \frac{1}{a_0 + n \cdot d}$
5. aritmeticko-geometrická posloupnost. $a_n = (a_0 + n \cdot d) \cdot q^n$

Speciální posloupnosti

Existuje více druhů posloupností:

1. aritmetická posloupnost, $a_n = a_0 + n \cdot d$
2. geometrická posloupnost, $a_n = a_0 \cdot q^n$
3. Fibonacciho posloupnost, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = 1,\ a_2 = 1$
4. harmonická posloupnost, $a_n = \frac{1}{a_0 + n \cdot d}$
5. aritmeticko-geometrická posloupnost. $a_n = (a_0 + n \cdot d) \cdot q^n$

V této přednášce se více zaměříme na první dvě

Fibonacciho posloupnost - jen jako zajímavost

Jako **Fibonacciho posloupnost** je v matematice označována nekonečná posloupnost přirozených čísel, začínající $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ (čísla nacházející se ve Fibonacciho posloupnosti jsou někdy nazývána Fibonacciho čísla), kde každé číslo je součtem dvou předchozích.

Zlatý řez $r = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Aritmetická posloupnost

Aritmetická posloupnost je druhem matematické posloupnosti, která se vyznačuje stálým rozdílem mezi libovolnými dvěma sousedními členy. Tento stálý rozdíl se nazývá **diference** a značí se písmenem d.

Pozor, číslo d může mít i zápornou hodnotu nebo může být rovno nule!

Rekurentní zápis: $a_{n+1} = a_n + d$

Explicitní zápis: $a_n = a_0 + n \cdot d$

Aritmetická posloupnost

Setkáváme se i s případy, kdy nás zajímá hodnota nějakého členu posloupnosti, ale namísto prvního členu a_1 známe hodnotu jiného.

Vzoreček

Vzorec r-tého členu z s-tého Jedná se o vzorec, který se označuje jako **vzorec r-tého členu z s-tého** *a zní*

$$a_r = a_s + (r - s) \cdot d.$$

Zde je a_r hledaný člen a a_s člen, který známe.
Vzorec pro určení diference

$$d = \frac{a_r - a_s}{r - s}$$

Pokud bychom položili $r = n$ a $s = 1$, pak obdržíme

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d.$$

Geometrická posloupnost je druh matematické posloupnosti, kde každý člen kromě prvního je stálým násobkem předchozího členu. Tento násobek se nazývá **kvocient** geometrické posloupnosti, značí se q, a pro posloupnosti s nenulovými členy je roven podílu libovolného členu kromě prvního a členu předchozího.

Rekurentní zápis: $a_{n+1} = a_n \cdot q$

Explicitní zápis: $a_n = a_0 \cdot q^n$

Geometrická posloupnost

Setkáváme se i s případy, kdy nás zajímá hodnota nějakého členu posloupnosti, ale namísto prvního členu a_1 známe hodnotu jiného.

Vzoreček

Vzorec r-tého členu z s-tého Jedná se o vzorec, který se označuje jako **vzorec r-tého členu z s-tého** *a zní*

$$a_r = a_s \cdot q^{(r-s)}$$

Zde je a_r hledaný člen a a_s člen, který známe.
Vzorec pro určení kvocientu

$$q = \sqrt[r-s]{\frac{a_r}{a_s}}$$

Pokud bychom položili $r = n$ a $s = 1$, pak obdržíme

$$a_n = a_1 \cdot q^{(n-1)}.$$

Sumační zápisy

Někdy je třeba sečíst určitý počet, nebo dokonce všechny členy posloupnosti. Tento problém lze zapsat celým výčtem, který bývá značně rozsáhlý, nebo zkrácený, kde se vypíše několik členů součtu a pomocí „. . .“ se zápis zkrátí, ale zde může dojít k nepřesnostem, či dokonce k nepochopení záměru. Z tohoto důvodu se zavedly takzvané **sumy.**

$$\text{Součtový zápis } \sum_{i=1}^{n} a_i; \quad \text{Zápis násobení } \prod_{i=1}^{n} a_i$$

- Znak $\sum$ označuje **součet**, $\prod$ označuje **násobení**
- $i = 1$ určuje, jak rozlišujeme jednotlivé prvky a zároveň od které hodnoty začínáme
- n určuje, kterou hodnotou indexu končíme

Často používané sumační triky

V některých případech nechcete sčítat všechny prvky, ale například všechny sudé, liché, případně střídavě měnit znaménka vybraných členů

- Součet sudých členů $\sum_{i=1}^{n} a_{2i}$

Často používané sumační triky

V některých případech nechcete sčítat všechny prvky, ale například všechny sudé, liché, případně střídavě měnit znaménka vybraných členů

- Součet sudých členů $\sum_{i=1}^{n} a_{2i}$
- Součet lichých členů $\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1}$ (součet od 1.)

Často používané sumační triky

V některých případech nechcete sčítat všechny prvky, ale například všechny sudé, liché, případně střídavě měnit znaménka vybraných členů

- Součet sudých členů $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i}$
- Součet lichých členů $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i-1}$ (součet od 1.)
- Součet lichých členů $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i+1}$ (součet od 3.)

Často používané sumační triky

V některých případech nechcete sčítat všechny prvky, ale například všechny sudé, liché, případně střídavě měnit znaménka vybraných členů

- Součet sudých členů $\sum_{i=1}^{n} a_{2i}$
- Součet lichých členů $\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1}$ (součet od 1.)
- Součet lichých členů $\sum_{i=1}^{n} a_{2i+1}$ (součet od 3.)
- Střídání znamének $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i$ (1. záporný)

Často používané sumační triky

V některých případech nechcete sčítat všechny prvky, ale například všechny sudé, liché, případně střídavě měnit znaménka vybraných členů

- Součet sudých členů $\sum_{i=1}^{n} a_{2i}$
- Součet lichých členů $\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1}$ (součet od 1.)
- Součet lichých členů $\sum_{i=1}^{n} a_{2i+1}$ (součet od 3.)
- Střídání znamének $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_i$ (1. záporný)
- Střídání znamének $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_i$ (1. kladný)

Procvičování zápisů

- Zapište součet druhých mocnin prvních 10 členů

Procvičování zápisů

- Zapište součet druhých mocnin prvních 10 členů

$$\sum_{i=1}^{10} a_i^2$$

- Zapište součet rozdílů po sobě jdoucích lichých a sudých 10 členů

Procvičování zápisů

- Zapište součet druhých mocnin prvních 10 členů

$$\sum_{i=1}^{10} a_i^2$$

- Zapište součet rozdílů po sobě jdoucích lichých a sudých 10 členů

$$\sum_{i=1}^{10} (-1)^{i+1} a_i \text{ aletrnativně } \sum_{i=1}^{5} a_{2i-1} - \sum_{i=1}^{5} a_{2i}$$

Procvičování zápisů

- Zapište aritmetický průměr posloupnosti o 100 členech

Procvičování zápisů

- Zapište aritmetický průměr posloupnosti o 100 členech

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{100} a_i}{100}$$

- Zapište geometrický průměr n členů

Procvičování zápisů

- Zapište aritmetický průměr posloupnosti o 100 členech

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} a_i}{100}$$

- Zapište geometrický průměr n členů

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

- Zapište součet čísel od 1 do 100

Procvičování zápisů

- Zapište aritmetický průměr posloupnosti o 100 členech

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} a_i}{100}$$

- Zapište geometrický průměr n členů

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$$

- Zapište součet čísel od 1 do 100

$$\sum_{i=1}^{100} i$$

Procvičování zápisů

- Definujte skalární součin dvou vektorů pomocí sumy

Procvičování zápisů

- Definujte skalární součin dvou vektorů pomocí sumy

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} (u_i \cdot v_i)$$

- Definujte součin matic pomocí sumy $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

Procvičování zápisů

- Definujte skalární součin dvou vektorů pomocí sumy

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} (u_i \cdot v_i)$$

- Definujte součin matic pomocí sumy $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

$$(c_{ij}) = \sum_{k=1}^{m} (a_{ik} \cdot b_{kj})$$

Sumační zápis - dvojitá suma

Některé zápisy jsou příliš složité na to aby je bylo možné zapsat pomocí jedné sumy. Například zápis součtu všech prvků matice **A**.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \text{ případně } \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)$$

Dvojitá suma jde použít i k sofistikovanějším zápisům, například součtu prvků pod hlavní diagonálou matice včetně diagonály

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij}$$

Aritmetická posloupnost

Úkol: Sečtěte čísla od 1 do sta.

Tady víc než kde jinde platí, že matematika není o počítání, ale o tom jak se počítání vyhnout.

Aritmetická posloupnost

Seřadíme za sebe všechna čísla od 1 do 100 a utvoříme dvojice: první číslo s poledním, druhé s předposledním, atd.

Aritmetická posloupnost

Seřadíme za sebe všechna čísla od 1 do 100 a utvoříme dvojice: první číslo s poledním, druhé s předposledním, atd.
Součet v každé dvojici bude přesně 101. Dále takovýchto párů vznikne přesně 50, což je polovina z čísla 100. Pak nám už zbývá jen obě čísla vynásobit a výsledek 5050 je na světě.

Seřadíme za sebe všechna čísla od 1 do 100 a utvoříme dvojice: první číslo s poledním, druhé s předposledním, atd.
Součet v každé dvojici bude přesně 101. Dále takovýchto párů vznikne přesně 50, což je polovina z čísla 100. Pak nám už zbývá jen obě čísla vynásobit a výsledek 5050 je na světě.

Tímto způsobem můžeme každou dvojici přepsat jako $a_1 + a_n$ a těchto dvojic bude polovina z celkového počtu sčítaných členů. Protože je počet členů n, potom počet všech dvojic (součtů) je $\frac{n}{2}$.
Nyní, když vynásobíme obě čísla, získáme součet s_n prvních n členů a odpovídající vzorec je tvaru

Aritmetická posloupnost

Seřadíme za sebe všechna čísla od 1 do 100 a utvoříme dvojice: první číslo s poledním, druhé s předposledním, atd.
Součet v každé dvojici bude přesně 101. Dále takovýchto párů vznikne přesně 50, což je polovina z čísla 100. Pak nám už zbývá jen obě čísla vynásobit a výsledek 5050 je na světě.

Tímto způsobem můžeme každou dvojici přepsat jako $a_1 + a_n$ a těchto dvojic bude polovina z celkového počtu sčítaných členů. Protože je počet členů n, potom počet všech dvojic (součtů) je $\frac{n}{2}$. Nyní, když vynásobíme obě čísla, získáme součet s_n prvních n členů a odpovídající vzorec je tvaru

$$s_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right).$$

Geometrická posloupnost

Vzoreček

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Kombinační číslo

Studenti jazykového gymnázia mají na výběr ze čtyř jazyků (angličtiny, němčiny, francouštiny, ruštiny), během studia se budou věnovat právě dvěma jazykům. Kolika způsoby mohou studenti vybírat? Máme množinu $J = \{A, N, F, R\}$, potom $cardJ = 4$.

Student tedy může vybírat z:

$$\{A, N\}, \{A, F\}, \{A, R\}, \{N, F\}, \{N, R\}, \{F, R\}.$$

$$\left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right) = 6$$

Kombinační číslo - obecně

Chceme-li vybrat k-prvkové podmnožiny z n-prvkové množiny, pak toto můžeme vyjádřit kombinačním číslem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k-1)}{k!}$$

Vlastnosti kombinačního čísla

Pro $k, n \in \mathbb{N}$ a $n \geq k$ platí:

- $\binom{0}{0} = 1,$
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$
- $\binom{n}{1} = n,$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

Modifikujme příklad 1

Při studiu si student vybírá tři jazyky ze čtyř, kde jazyk na prvním místě je hlavní (C1), jazyk na druhém místě je vedlejší (B2) a na třetím místě je doplňkový jazyk (A2). Vypište všechny možnosti. Pak je zřejmé, že výběr A, N, R NENÍ stejný jako výběr N, R, A.

Modifikujme příklad 1

Při studiu si student vybírá tři jazyky ze čtyř, kde jazyk na prvním místě je hlavní (C1), jazyk na druhém místě je vedlejší (B2) a na třetím místě je doplňkový jazyk (A2). Vypište všechny možnosti. Pak je zřejmé, že výběr A, N, R NENÍ stejný jako výběr N, R, A.

A,N,R	N,R,A	R,A,N	A,R,N	N,A,R	R,N,A
A,N,F	N,F,A	F,A,N	A,F,N	N,A,F	F,N,A
A,F,R	F,R,A	R,A,F	A,R,F	F,A,R	R,F,A
F,N,R	N,R,F	R,F,N	F,R,N	N,F,R	R,N,F

Počet všech možností z příkladu výše můžeme vyjádřit jako:

$$6 \cdot \binom{4}{3} = 24, \qquad\qquad \text{kde } 6 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Tento výpočet můžeme napsat obecně

$$k! \cdot \binom{n}{k} = k! \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Na večírek jisté firmy je pro zaměstnance připravena barmanská ahow(B), raut (R), živá hudba (H), degustace vín (D). Žádné dvě akce neprobíhají zároveň. Kolika způsoby může akce na večírku uspořádat?

B,R,H,D	D,B,R,H	H,D,B,R	R,H,D,B	B,D,R,H
B,H,D,R	B,R,H,D	B,D,H,R	...	...
R,D,H,B	...	...		
B,D,H,R				

Počet všech možností můžeme vyjádřit obdobně jako v předchozím příkladu

$$24 \cdot \binom{4}{4} = 24 \cdot 1, \qquad \text{kde } 24 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Speciální případ

Tento výpočet lze zobecnit na pro n prvků a vyjádřit pak vzorcem:

$$n!\binom{n}{n} = n! \cdot \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = n!$$

Úlohy bez opakování

Postupně jak šla přednáška, tak jsem zavedli:

- **Kombinace**

$$K(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **Variace**

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Permutace**

$$P(n) = n!$$

Úlohy s opakování

Pro celkovou ucelenost, zavedeme všechny předchozí možnosti s opakováním:

- **Kombinace**

$$K'(n,k) = \left(\begin{array}{c} n+k+1 \\ k \end{array} \right)$$

- **Variace**

$$V'(n,k) = n^k$$

- **Permutace**

$$P'(n) = \left(\begin{array}{c} (k_1 + k_2 \ldots k_n)! \\ k_1! k_2! \ldots k_n \end{array} \right)$$