Integrální počet - primitivní funkce

Jestliže $F(x)$ a $f(x)$ jsou takové funkce, že pro všechna x z intervalu I platí $f(x) = F'(x)$, pak řekneme, že $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na intervalu I.

Příklad : Funkce $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 5$ je primitivní k $f(x) = 3x^2 + x + 3$ na $\mathbb{R}$, protože $f(x) = F'(x)$.

Integrální počet - primitivní funkce

Jestliže $F(x)$ a $f(x)$ jsou takové funkce, že pro všechna x z intervalu I platí $f(x) = F'(x)$, pak řekneme, že $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na intervalu I.

Příklad : Funkce $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 5$ je primitivní k $f(x) = 3x^2 + x + 3$ na $\mathbb{R}$, protože $f(x) = F'(x)$.

Poznámka : Je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ na intervalu I, pak funkce $F(x)$ je zde spojitá (dokonce má derivaci). Jaké podmínky musí splňovat $f(x)$? Postačující podmínkou k tomu, aby k $f(x)$ existovala primitivní funkce je spojitost $f(x)$ na I. Je primitivní funkce určena jednoznačně?

Příklad : Funkce $G(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 7$ je též primitivní k funkci $f(x) = 3x^2 + x + 3$ z předchozího příkladu.

Integrální počet - primitivní funkce

Jestliže $F(x)$ a $f(x)$ jsou takové funkce, že pro všechna x z intervalu I platí $f(x) = F'(x)$, pak řekneme, že $F(x)$ je primitivní k $f(x)$ na intervalu I.

Příklad : Funkce $F(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 5$ je primitivní k $f(x) = 3x^2 + x + 3$ na $\mathbb{R}$, protože $f(x) = F'(x)$.

Poznámka : Je-li $F(x)$ primitivní k $f(x)$ na intervalu I, pak funkce $F(x)$ je zde spojitá (dokonce má derivaci). Jaké podmínky musí splňovat $f(x)$? Postačující podmínkou k tomu, aby k $f(x)$ existovala primitivní funkce je spojitost $f(x)$ na I. Je primitivní funkce určena jednoznačně?

Příklad : Funkce $G(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} + 3x + 7$ je též primitivní k funkci $f(x) = 3x^2 + x + 3$ z předchozího příkladu.

Věta : Jsou-li funkce $F(x)$ a $G(x)$ primitivní k funkci $f(x)$ na intervalu I, pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$, taková, že pro $\forall x \in I : F(x) = G(x) + c$

Neurčitý integrál

Množinu všech funkcí primitivních k $f(x)$ na I nazýváme neurčitý integrál $f(x)$ na I a značíme $\int f(x)dx$. Píšeme $\int f(x)dx = F(x) + c$, kde $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k $f(x)$ na I, dx je diferenciál x a c tzv. integrační konstanta.

Neurčitý integrál

Množinu všech funkcí primitivních k $f(x)$ na I nazýváme neurčitý integrál $f(x)$ na I a značíme $\int f(x)dx$. Píšeme $\int f(x)dx = F(x) + c,$ kde $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k $f(x)$ na I, dx je diferenciál x a c tzv. integrační konstanta.

Příklad : Najděte neurčité integrály

1. $\int \sin x dx$
2. $\int x^3 dx$
3. $\int e^{2x} dx$

Neurčitý integrál

Množinu všech funkcí primitivních k $f(x)$ na I nazýváme neurčitý integrál $f(x)$ na I a značíme $\int f(x)dx$. Píšeme $\int f(x)dx = F(x) + c,$ kde $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k $f(x)$ na I, dx je diferenciál x a c tzv. integrační konstanta.

Příklad : Najděte neurčité integrály

1. $\int \sin x dx$
2. $\int x^3 dx$
3. $\int e^{2x} dx$

Řešení:

1. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

Neurčitý integrál

Množinu všech funkcí primitivních k $f(x)$ na I nazýváme neurčitý integrál $f(x)$ na I a značíme $\int f(x)dx$. Píšeme $\int f(x)dx = F(x) + c$, kde $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k $f(x)$ na I, dx je diferenciál x a c tzv. integrační konstanta.

Příklad : Najděte neurčité integrály

1. $\int \sin x dx$
2. $\int x^3 dx$
3. $\int e^{2x} dx$

Řešení:

1. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
2. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

Neurčitý integrál

Množinu všech funkcí primitivních k $f(x)$ na I nazýváme neurčitý integrál $f(x)$ na I a značíme $\int f(x)dx$. Píšeme $\int f(x)dx = F(x) + c$, kde $F(x)$ je libovolná primitivní funkce k $f(x)$ na I, dx je diferenciál x a c tzv. integrační konstanta.

Příklad : Najděte neurčité integrály

1. $\int \sin x dx$
2. $\int x^3 dx$
3. $\int e^{2x} dx$

Řešení:

1. $\int \sin x dx = -\cos x + c$
2. $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$
3. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + c$

Základní neurčité integrály

$\int 0 dx = c,\ x \in (-\infty, \infty)$

$\int e^x dx = e^x + c,\ x \in (-\infty, \infty)$

$\int \sin x dx = -\cos x + c,\ x \in (-\infty, \infty)$

$\int \cos x dx = \sin x + c,\ x \in (-\infty, \infty)$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg(x) + c,\ x \in (-\infty, \infty)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin(x) + c,\ x \in (-1, 1)$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1, x \in (-\infty, \infty)$ pro $n \geq 0$ celé, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $(0, \infty)$ pro $n < 0$ celé, $x \in (0, \infty)$ pro n necelé

$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + c,\ x \in (0, \infty)$ nebo $x \in (-\infty, 0)$

$\int \frac{dx}{cos^2(x)} = tg(x) + c,$ pro interval, kde $\cos x \neq 0$

$\int \frac{dx}{sin^2(x)} = -cotg(x) + c,$ pro interval, kde $\sin x \neq 0$

Pravidla pro integrování

Integrace lineární kombinace funkcí:

Věta : Jestliže funkce $f_1(x)$, $f_2(x), \dots f_n(x)$ mají na I neurčité integrály, pak pro libovolné konstanty $c_1, c_2, \dots c_n$ existuje neurčitý integrál funkce $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$ a platí:

$$\int f(x)dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + \dots + c_n \int f_n(x)dx$$

Pravidla pro integrování

Integrace lineární kombinace funkcí:

Věta : Jestliže funkce $f_1(x)$, $f_2(x), \dots f_n(x)$ mají na I neurčité integrály, pak pro libovolné konstanty $c_1, c_2, \dots c_n$ existuje neurčitý integrál funkce $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x)$ a platí:

$$\int f(x)dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + \dots + c_n \int f_n(x)dx$$

Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int (e^x + \frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{x})dx$

Pravidla pro integrování

Integrace lineární kombinace funkcí:

Věta : Jestliže funkce $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x)$ mají na I neurčité integrály, pak pro libovolné konstanty $c_1, c_2, \ldots c_n$ existuje neurčitý integrál funkce $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ a platí:

$$\int f(x)dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + \ldots + c_n \int f_n(x)dx$$

Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int (e^x + \frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{x})dx$

Řešení: $\int (e^x + \frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{x})dx = \int e^x dx + 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx + 3 \int \frac{1}{x} dx =$
$e^x + 2arctgx + 3ln|x| + c.$

Pravidla pro integrování

Integrace lineární kombinace funkcí:

Věta : Jestliže funkce $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x)$ mají na I neurčité integrály, pak pro libovolné konstanty $c_1, c_2, \ldots c_n$ existuje neurčitý integrál funkce $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ a platí:

$$\int f(x)dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + \ldots + c_n \int f_n(x)dx$$

Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int (e^x + \frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{x})dx$

Řešení: $\int (e^x + \frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{x})dx = \int e^x dx + 2 \int \frac{1}{x^2+1} dx + 3 \int \frac{1}{x} dx = e^x + 2arctgx + 3ln|x| + c.$

Metoda per partes:

Věta : Jestliže funkce $u(x),\ v(x)$ mají na otevřeném intervalu I spojité derivace, pak platí: $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$

Metoda per partes - příklady

Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x.\sin x dx$

Metoda per partes - příklady

Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x.\sin x dx$

Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = \sin x, v(x) = x$.
Dopočítáme $u(x) = -\cos x, v'(x) = 1$ a dosadíme:

Metoda per partes - příklady

Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x.\sin x dx$
Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = \sin x, v(x) = x$.
Dopočítáme $u(x) = -\cos x, v'(x) = 1$ a dosadíme:
$\int x.\sin x dx = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + c.$

Metoda per partes - příklady

Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x.\sin x dx$
Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = \sin x, v(x) = x$.
Dopočítáme $u(x) = -\cos x, v'(x) = 1$ a dosadíme:
$\int x.\sin x dx = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + c.$

Někdy je nutné použít pravidlo opakovaně.
Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x^2.e^x dx$

Metoda per partes - příklady

Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x.\sin x dx$
Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = \sin x, v(x) = x$.
Dopočítáme $u(x) = -\cos x, v'(x) = 1$ a dosadíme:
$\int x.\sin x dx = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + c.$

Někdy je nutné použít pravidlo opakovaně.
Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x^2.e^x dx$
Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = e^x, v(x) = x^2$. Dopočítáme $u(x) = e^x, v'(x) = 2x$ a dosadíme:

Metoda per partes - příklady

Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x.\sin x dx$
Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = \sin x, v(x) = x$.
Dopočítáme $u(x) = -\cos x, v'(x) = 1$ a dosadíme:
$\int x.\sin x dx = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + c.$

Někdy je nutné použít pravidlo opakovaně.
Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x^2.e^x dx$
Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = e^x, v(x) = x^2$. Dopočítáme $u(x) = e^x, v'(x) = 2x$ a dosadíme:
$\int x^2.e^x dx = x^2.e^x - \int 2x.e^x dx$ Per partes zopakujeme pro $u'(x) = e^x, v(x) = 2x$, tedy $u(x) = e^x, v'(x) = 2$:

Metoda per partes - příklady

Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x. \sin x dx$
Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = \sin x, v(x) = x$.
Dopočítáme $u(x) = -\cos x, v'(x) = 1$ a dosadíme:
$\int x. \sin x dx = -x \cos x - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$.

Někdy je nutné použít pravidlo opakovaně.
Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x^2.e^x dx$
Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = e^x, v(x) = x^2$. Dopočítáme $u(x) = e^x, v'(x) = 2x$ a dosadíme:
$\int x^2.e^x dx = x^2.e^x - \int 2x.e^x dx$ Per partes zopakujeme pro $u'(x) = e^x, v(x) = 2x$, tedy $u(x) = e^x, v'(x) = 2$:
$\int x^2.e^x dx = x^2.e^x - [2x.e^x - \int 2e^x dx] = x^2.e^x - 2x.e^x + 2e^x + c$.

Metoda per partes - příklady

Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x.\sin x dx$
Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = \sin x, v(x) = x$.
Dopočítáme $u(x) = -\cos x, v'(x) = 1$ a dosadíme:
$\int x.\sin x dx = -x\cos x - \int -\cos x dx = -x\cos x + \sin x + c$.

Někdy je nutné použít pravidlo opakovaně.
Příklad : Najděte neurčitý integrál $\int x^2.e^x dx$
Řešení: Použijeme metodu per partes pro: $u'(x) = e^x, v(x) = x^2$. Dopočítáme $u(x) = e^x, v'(x) = 2x$ a dosadíme:
$\int x^2.e^x dx = x^2.e^x - \int 2x.e^x dx$ Per partes zopakujeme pro $u'(x) = e^x, v(x) = 2x$, tedy $u(x) = e^x, v'(x) = 2$:
$\int x^2.e^x dx = x^2.e^x - [2x.e^x - \int 2e^x dx] = x^2.e^x - 2x.e^x + 2e^x + c$.

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$.

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$.
- Do daného integrálu dosadíme za $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)dt$ a dostaneme $\int f(x)dx$.

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$.
- Do daného integrálu dosadíme za $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)dt$ a dostaneme $\int f(x)dx$.
- Vypočítáme $F(x) = \int f(x)dx$.

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$.
- Do daného integrálu dosadíme za $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)dt$ a dostaneme $\int f(x)dx$.
- Vypočítáme $F(x) = \int f(x)dx$.
- Určíme interval I, na kterém platí $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

I. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$.
- Do daného integrálu dosadíme za $\varphi(t)$ a $\varphi'(t)dt$ a dostaneme $\int f(x)dx$.
- Vypočítáme $F(x) = \int f(x)dx$.
- Určíme interval I, na kterém platí $F'(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$.
- Hledaný integrál je $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c,\ \ t \in I$.

Příklad: Vypočítejte $\int sin(2x)dx$.

Příklad: Vypočítejte $\int sin(2x)dx$.

Řešení:

$$\int sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int sin(2x).2dx =$$

Příklad: Vypočítejte $\int sin(2x)dx$.

Řešení:

$$\int sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int sin(2x).2dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} substituce & u = 2x \\ & du = 2dx \end{array} \right| =$$

Příklad: Vypočítejte $\int sin(2x)dx$.

Řešení:

$$\int sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int sin(2x).2dx =$$

$$= \left| \begin{array}{lr} substituce & u = 2x \\ & du = 2dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int sin(u)du =$$

Příklad: Vypočítejte $\int sin(2x)dx$.

Řešení:

$$\int sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int sin(2x).2dx =$$

$$= \left| \begin{array}{lr} substituce & u = 2x \\ & du = 2dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int sin(u)du = \frac{1}{2}(-cos(u)) + c$$

Příklad: Vypočítejte $\int sin(2x)dx$.

Řešení:

$$\int sin(2x)dx = \frac{1}{2}\int sin(2x).2dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} substituce & u = 2x \\ & du = 2dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int sin(u)du = \frac{1}{2}(-cos(u)) + c = \frac{1}{2}(-cos(2x)) + c, \ x \in \mathbb{R}.$$

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1}\,dx$.

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1}dx$.

Řešení:

$$\int e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}.3dx =$$

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1}\,dx$.

Řešení:

$$\int e^{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}.3dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \textit{substituce} & u = 3x+1 \\ & du = 3dx \end{array} \right| =$$

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1}dx$.

Řešení:

$$\int e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}.3dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \textit{substituce} & u = 3x+1 \\ & du = 3dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int e^{u}.du$$

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1} dx$.

Řešení:

$$\int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x+1} .3dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} substituce & u = 3x+1 \\ & du = 3dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \int e^{u} .du = \frac{1}{3} e^{u} + c$$

Příklad: Vypočítejte $\int e^{3x+1}dx$.

Řešení:

$$\int e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1}.3dx =$$

$$= \left| \begin{array}{cc} \textit{substituce} & u = 3x+1 \\ & du = 3dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int e^{u}.du = \frac{1}{3}e^{u} + c = \frac{1}{3}e^{3x+1} + c, \; x \in \mathbb{R}.$$

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1}dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \textit{substituce} & u = x^2+1 \\ & du = 2x dx \end{array} \right| =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} \textit{substituce} & u = x^2+1 \\ & du = 2x dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} substituce & u = x^2+1 \\ & du = 2xdx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} ln|u| + c =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \frac{x}{x^2+1} dx$.

Řešení:

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} substituce & u = x^2+1 \\ & du = 2xdx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} ln|u| + c = \frac{1}{2} ln|x^2+1| + c, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka : Pro funkci $\varphi(t)$, která je nenulová na intervalu I a má zde derivaci $\varphi'(t)$ platí: $\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = ln|\varphi(t)| + c, \ t \in I : \varphi(t) \neq 0$.

Poznámka : Pro funkci $\varphi(t)$, která je nenulová na intervalu I a má zde derivaci $\varphi'(t)$ platí: $\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = ln|\varphi(t)| + c, \; t \in I : \varphi(t) \neq 0.$

Důkaz:

Poznámka : Pro funkci $\varphi(t)$, která je nenulová na intervalu I a má zde derivaci $\varphi'(t)$ platí: $\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = ln|\varphi(t)| + c, \; t \in I : \varphi(t) \neq 0.$

Důkaz:

Ověřte sami.

II. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(x)dx$ na intervalu J.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$ tak, aby na J existovala $\varphi^{-1}(x)$.

II. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(x)dx$ na intervalu J.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$ tak, aby na J existovala $\varphi^{-1}(x)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$ a do daného integrálu dosadíme místo x výraz $\varphi(t)$ a místo dx výraz $\varphi'(t)dt$.

II. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(x)dx$ na intervalu J.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$ tak, aby na J existovala $\varphi^{-1}(x)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$ a do daného integrálu dosadíme místo x výraz $\varphi(t)$ a místo dx výraz $\varphi'(t)dt$.
- Určíme $G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

II. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(x)dx$ na intervalu J.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$ tak, aby na J existovala $\varphi^{-1}(x)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$ a do daného integrálu dosadíme místo x výraz $\varphi(t)$ a místo dx výraz $\varphi'(t)dt$.
- Určíme $G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.
- Dosadíme do $G(t)$ místo t výraz $\varphi^{-1}(x)$ a dostaneme $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$.

II. výpočet integrálu substitucí: hledáme $\int f(x)dx$ na intervalu J.

- Zvolíme substituci $x = \varphi(t)$ tak, aby na J existovala $\varphi^{-1}(x)$.
- Vypočítáme $dx = \varphi'(t)dt$ a do daného integrálu dosadíme místo x výraz $\varphi(t)$ a místo dx výraz $\varphi'(t)dt$.
- Určíme $G(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.
- Dosadíme do $G(t)$ místo t výraz $\varphi^{-1}(x)$ a dostaneme $F(x) = G(\varphi^{-1}(x))$.
- Zkontrolujeme, zda na intervalu J platí $F'(x) = f(x)$.

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx, \; x \in (-1, 1)$.

Řešení:

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx, \ x \in (-1,1)$.

Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx, \; x \in (-1,1)$.

Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} substituce & x = sin(t) & t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ & dx = cos(t)dt & \end{array} \right| =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx, \; x \in (-1,1)$.

Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ccc} substituce & x = sin(t) & t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ & dx = cos(t)dt & \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{1-sin^2(t)}cos(t)dt = \int cos^2(t)dt =$$

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx, \; x \in (-1,1)$.

Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} substituce & x = sin(t) & t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ & dx = cos(t)dt & \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{1-sin^2(t)}cos(t)dt = \int cos^2(t)dt =$$

$$= \int \frac{cos(2t)+1}{2}dt = \frac{sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + c, \; x \in (-1,1).$$

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx,\ x \in (-1,1)$.

Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{lll} substituce & x = sin(t) & t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ & dx = cos(t)dt & \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{1-sin^2(t)}cos(t)dt = \int cos^2(t)dt =$$

$$= \int \frac{cos(2t)+1}{2}dt = \frac{sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + c,\ x \in (-1,1).$$

Nyní je nutné vrátit se k původní proměnné x. Pro $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ vyjádříme $t = arcsin(x)$ a protože

$$sin(2t) = 2sin(t)cos(t) = 2sin(t)\sqrt{1-sin^2(t)},$$

Příklad: Vypočítejte $\int \sqrt{1-x^2}dx,\ x \in (-1,1)$.

Řešení:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{lcl} substituce & x = sin(t) & t \in (-\pi/2, \pi/2) \\ & dx = cos(t)dt & \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{1-sin^2(t)}cos(t)dt = \int cos^2(t)dt =$$

$$= \int \frac{cos(2t)+1}{2}dt = \frac{sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} + c,\ x \in (-1,1).$$

Nyní je nutné vrátit se k původní proměnné x. Pro $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ vyjádříme $t = arcsin(x)$ a protože

$$sin(2t) = 2sin(t)cos(t) = 2sin(t)\sqrt{1-sin^2(t)},$$

dostaneme výsledek $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{arcsin(x)}{2} + c$.

Určitý integrál

Uvažujme graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pokusíme se určit obsah plochy ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$.

Určitý integrál

Uvažujme graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pokusíme se určit obsah plochy ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$. Postupujme následujícím způsobem:
rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$ na n částečných intervalů $\langle x_1, x_2\rangle, \langle x_2, x_3\rangle, \dots, \langle x_n, x_{n+1}\rangle$, kde $a = x_1 < x_2 < \dots, x_n < x_{n+1} = b$. Toto dělení označíme D_n.

Určitý integrál

Uvažujme graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pokusíme se určit obsah plochy ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$. Postupujme následujícím způsobem:
rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$ na n částečných intervalů $\langle x_1, x_2\rangle, \langle x_2, x_3\rangle, \ldots, \langle x_n, x_{n+1}\rangle$, kde $a = x_1 < x_2 < \ldots, x_n < x_{n+1} = b$. Toto dělení označíme D_n. Dále zavedeme

$m_i = \inf_{x\in\langle x_i, x_{i+1}\rangle} f(x)$ a $M_i = \sup_{x\in\langle x_i, x_{i+1}\rangle} f(x)$, $i = 1, \ldots, n$.

Určitý integrál

Uvažujme graf funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pokusíme se určit obsah plochy ohraničené grafem, osou x a svislými přímkami $x = a$, $x = b$. Postupujme následujícím způsobem:
rozdělíme interval $\langle a, b\rangle$ na n částečných intervalů $\langle x_1, x_2\rangle, \langle x_2, x_3\rangle, \ldots, \langle x_n, x_{n+1}\rangle$, kde $a = x_1 < x_2 < \ldots, x_n < x_{n+1} = b$. Toto dělení označíme D_n. Dále zavedeme

$m_i = \inf_{x\in\langle x_i, x_{i+1}\rangle} f(x)$ a $M_i = \sup_{x\in\langle x_i, x_{i+1}\rangle} f(x)$, $i = 1, \ldots, n$.

Hledaný plošný obsah lze odhadnout pomocí výrazů

$s(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_{i+1} - x_i)$, resp. $S(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_{i+1} - x_i)$.

Tyto výrazy nazýváme dolním, resp. horním Riemannovým součtem funkce f pro dělení D_n.

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b\rangle$, pak zde existuje tzv. dolní Riemannův integrál

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_D s(f, D)$$

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b\rangle$, pak zde existuje tzv. dolní Riemannův integrál

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \sup_D s(f, D)$$

Je-li funkce $f(x)$ omezená zhora na $\langle a, b\rangle$, pak zde existuje tzv. horní Riemannův integrál

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx = \inf_D S(f, D).$$

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b\rangle$, pak zde existuje tzv. dolní Riemannův integrál

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \sup_D s(f, D)$$

Je-li funkce $f(x)$ omezená zhora na $\langle a, b\rangle$, pak zde existuje tzv. horní Riemannův integrál

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx = \inf_D S(f, D).$$

Definice : Má-li funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ horní i dolní Riemannův integrál a jsou-li stejné, pak klademe $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\overline{b}} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^b f(x)dx$ a toto číslo nazýváme Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$.

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b\rangle$, pak zde existuje tzv. dolní Riemannův integrál

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \sup_D s(f, D)$$

Je-li funkce $f(x)$ omezená zhora na $\langle a, b\rangle$, pak zde existuje tzv. horní Riemannův integrál

$$\int_{a}^{\overline{b}} f(x)dx = \inf_D S(f, D).$$

Definice : Má-li funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ horní i dolní Riemannův integrál a jsou-li stejné, pak klademe $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\overline{b}} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$ a toto číslo nazýváme Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$.

Poznámka : Číslo a nazýváme dolní mez integrálu, číslo b nazýváme horní mez integrálu. O funkci f říkáme, že je na daném intervalu integrabilní.

Určitý integrál - definice

Označme D množinu všech možných dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li funkce $f(x)$ omezená zdola na $\langle a, b\rangle$, pak zde existuje tzv. dolní Riemannův integrál

$$\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx = \sup_D s(f, D)$$

Je-li funkce $f(x)$ omezená zhora na $\langle a, b\rangle$, pak zde existuje tzv. horní Riemannův integrál

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)dx = \inf_D S(f, D).$$

Definice : Má-li funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ horní i dolní Riemannův integrál a jsou-li stejné, pak klademe $\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\overline{b}} f(x)dx = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$ a toto číslo nazýváme Riemannovým integrálem funkce $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$.

Poznámka : Číslo a nazýváme dolní mez integrálu, číslo b nazýváme horní mez integrálu. O funkci f říkáme, že je na daném intervalu integrabilní.

Poznámka : Pro existenci integrálu $f(x)$ na $\langle a, b\rangle$ stačí, aby zde funkce byla spojitá.

Určitý integrál - vlastnosti

Definice : Rozšíření pojmu integrálu pro případy, kdy není splněna podmínka $a < b$:
pro $a = b$ klademe $\int_a^b f(x)dx = 0$,
pro $b < a$ klademe $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Určitý integrál - vlastnosti

Definice : Rozšíření pojmu itegrálu pro případy, kdy není splněna podmínka $a < b$:
pro $a = b$ klademe $\int_a^b f(x)dx = 0$,
pro $b < a$ klademe $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Věta : Existují-li integrály $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$, pak je funkce $f(x)$ integrabilní i na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

Určitý integrál - vlastnosti

Definice : Rozšíření pojmu itegrálu pro případy, kdy není splněna podmínka $a < b$:
pro $a = b$ klademe $\int_a^b f(x)dx = 0$,
pro $b < a$ klademe $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Věta : Existují-li integrály $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$, pak je funkce $f(x)$ integrabilní i na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Věta : Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na $\langle a, b\rangle$ a platí-li pro $\forall x \in \langle a, b\rangle : f(x) \geq g(x)$, pak také platí $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Určitý integrál - vlastnosti

Definice : Rozšíření pojmu itegrálu pro případy, kdy není splněna podmínka $a < b$:
pro $a = b$ klademe $\int_a^b f(x)dx = 0$,
pro $b < a$ klademe $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Věta : Existují-li integrály $\int_a^c f(x)dx$ i $\int_c^b f(x)dx$, pak je funkce $f(x)$ integrabilní i na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Věta : Jsou-li funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na $\langle a, b\rangle$ a platí-li pro $\forall x \in \langle a, b\rangle : f(x) \geq g(x)$, pak také platí $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Věta : Pro funkce $f(x)$ a $g(x)$ integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ a libovolné konstanty α, β je integrovatelná i funkce $\alpha f(x) + \beta g(x)$ a platí:
$\int_a^b(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$.

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b\rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b\rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b\rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b\rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a,b\rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a,b\rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a,b\rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1,\ a = 1,\ b = 3$.

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b\rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b\rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1,\ a = 1,\ b = 3$.

Řešení: $\int_1^3 (x+1)dx = [x^2/2 + x]_1^3 = 9/2 + 3 - (1/2 + 1) = 6$.

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b\rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b\rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1,\ a = 1,\ b = 3$.

Řešení: $\int_1^3 (x + 1)dx = [x^2/2 + x]_1^3 = 9/2 + 3 - (1/2 + 1) = 6$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = \sqrt[3]{x},\ a = 0,\ b = 1$

Určitý integrál - výpočet

Pro funkci $f(x)$ integrovatelnou na $\langle a, b\rangle$ a libovolné $x_0 \in \langle a, b\rangle$ platí: Funkce $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ je spojitá na $\langle a, b\rangle$ a ve všech bodech spojitosti funkce $f(x)$ platí: $F'(x) = f(x)$ (tedy je-li $f(x)$ spojitá, pak je $F(x)$ její primitivní funkcí).

Věta : Newtonova formule:

Je-li $f(x)$ spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $F(x)$ je její libovolná primitivní funkce, pak:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

píšeme též $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = x + 1,\ a = 1,\ b = 3$.

Řešení: $\int_1^3 (x+1)dx = [x^2/2 + x]_1^3 = 9/2 + 3 - (1/2 + 1) = 6$.

Příklad : Spočtěte určitý integrál pro $f(x) = \sqrt[3]{x},\ a = 0,\ b = 1$

Řešení: $\int_0^1 \sqrt[3]{x}dx = [3x^{4/3}/4]_0^1 = 3/4$.

Určitý integrál - integrační metody

Per partes v určitém integrálu

Jestliže funkce $u(x),\ v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b\rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Určitý integrál - integrační metody

Per partes v určitém integrálu

Jestliže funkce $u(x),\ v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b\rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Příklad : $\int_0^1 x ln(x+1)dx = \left| \begin{array}{cc} u' = x & v = ln(x+1) \\ u = x^2/2 & v' = 1/(x+1) \end{array} \right| = [\frac{x^2}{2} ln(x+1)]_0^1 -$
$\int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)}dx = \frac{1}{2}ln2 - 0 - \int_0^1 \frac{x^2-1+1}{2(x+1)}dx = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{(x+1)}\right) dx =$
$\frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2} - x + ln(x+1)]_0^1 = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2 - 0 = \frac{1}{4}$

Určitý integrál - integrační metody

Per partes v určitém integrálu

Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b\rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Příklad : $\int_0^1 x ln(x+1)dx = \left| \begin{array}{ll} u' = x & v = ln(x+1) \\ u = x^2/2 & v' = 1/(x+1) \end{array} \right| = [\frac{x^2}{2} ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)}dx = \frac{1}{2}ln2 - 0 - \int_0^1 \frac{x^2-1+1}{2(x+1)}dx = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{(x+1)}\right) dx = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2} - x + ln(x+1)]_0^1 = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2 - 0 = \frac{1}{4}$

Substituce v určitém integrálu

Jestliže $u = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na $\langle a, b\rangle$ a je-li $f(u)$ spojitá na $\varphi(\langle a, b\rangle)$, pak platí $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$

Určitý integrál - integrační metody

Per partes v určitém integrálu

Jestliže funkce $u(x)$, $v(x)$ mají spojité derivace na $\langle a, b\rangle$, pak platí:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Příklad : $\int_0^1 x ln(x+1)dx = \left| \begin{array}{cc} u' = x & v = ln(x+1) \\ u = x^2/2 & v' = 1/(x+1) \end{array} \right| = [\frac{x^2}{2} ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)}dx = \frac{1}{2}ln2 - 0 - \int_0^1 \frac{x^2-1+1}{2(x+1)}dx = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{(x+1)}\right) dx = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2} - x + ln(x+1)]_0^1 = \frac{1}{2}ln2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}ln2 - 0 = \frac{1}{4}$

Substituce v určitém integrálu

Jestliže $u = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na $\langle a, b\rangle$ a je-li $f(u)$ spojitá na $\varphi(\langle a, b\rangle)$, pak platí $\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du.$

Příklad :

$\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2+2x+3 \\ du = (2x+2)dx \\ u(-1) = 2,\ u(0) = 3 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{1}{u}dx = \frac{1}{2}[ln(u)]_2^3 = \frac{1}{2}ln\frac{3}{2}.$

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice : Definujeme $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$ pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky definujeme $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx.$

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice : Definujeme $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$ pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky definujeme $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx.$

Příklad :
$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice : Definujeme $\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$ pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky definujeme $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx.$

Příklad :
$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ nazveme konvergentním, pokud pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ konvergují oba integrály $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$, $\int_c^{\infty} f(x)dx$, potom definujeme $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{\infty} f(x)dx.$

Nevlastní integrál

Nevlastním integrálem vzhledem k intervalu rozumíme určitý integrál, kde platí: $a = -\infty$ nebo $b = \infty$.

Definice : Definujeme $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)dx,$ pokud tato limita konverguje. V opačném případě řekneme, že integrál diverguje. Analogicky definujeme $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx.$

Příklad :

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_2^t = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Integrál $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ nazveme konvergentním, pokud pro nějaké $c \in \mathbb{R}$ konvergují oba integrály $\int_{-\infty}^c f(x)dx$, $\int_c^\infty f(x)dx$, potom definujeme

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx.$$

Příklad : $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2-2x+5}dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x-1)^2+4}dx = \left| \begin{array}{c} 2t = x-1 \\ 2dt = dx \end{array} \right| =$

$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{4t^2+4}2dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^2+1}dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}dt =$

$\frac{1}{2}[arctg(t)]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2}[arctg(t)]_0^\infty = \frac{1}{2}(0 - \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0) = \frac{\pi}{2}$

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t\rangle$ pro libovolné $t \in \langle a, b)$, pak definujeme $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)dx$, pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro funkci neomezenou v bodě a definuje $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+} \int_t^b f(x)dx$.

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t\rangle$ pro libovolné $t \in \langle a, b)$, pak definujeme $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)dx,$ pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro funkci neomezenou v bodě a definuje $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+} \int_t^b f(x)dx.$

Příklad : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = \lim_{t\to 0+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = \lim_{t\to 0+}[5x^{4/5}/4]_t^1 =$
$\lim_{t\to 0+}(5/4 - 5\sqrt[5]{t^4}/4) = 5/4 - 0 = 5/4.$

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t\rangle$ pro libovolné $t \in \langle a, b)$, pak definujeme $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)dx,$ pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro funkci neomezenou v bodě a definuje $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+} \int_t^b f(x)dx.$

Příklad : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = \lim_{t\to 0+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx = \lim_{t\to 0+}[5x^{4/5}/4]_t^1 =$ $\lim_{t\to 0+}(5/4 - 5\sqrt[5]{t^4}/4) = 5/4 - 0 = 5/4.$

Poznámka : Je-li funkce $f(x)$ je neomezená v bodě $c \in (a, b)$, pak definujeme $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$ pokud oba integrály na pravé straně existují.

Nevlastní integrál

Nevlastní integrál vzhledem k funkci

Jestliže $f(x)$ je neomezená v bodě b , ale je omezená na intervalu $\langle a, t\rangle$ pro libovolné $t \in \langle a, b)$, pak definujeme $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)dx$, pokud tato limita existuje. Jinak řekneme, že integrál diverguje. Analogicky se pro funkci neomezenou v bodě a definuje $\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a+} \int_t^b f(x)dx$.

Příklad : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t\to 0+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt[5]{x}} dx = \lim_{t\to 0+} [5x^{4/5}/4]_t^1 =$ $\lim_{t\to 0+}(5/4 - 5\sqrt[5]{t^4}/4) = 5/4 - 0 = 5/4.$

Poznámka : Je-li funkce $f(x)$ je neomezená v bodě $c \in (a, b)$, pak definujeme $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, pokud oba integrály na pravé straně existují.

Příklad : Spočtěte: $\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx$.

Špatný postup: $\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx = [ln|x - 1|]_0^2 = ln 1 - ln 1 = 0$

Správně: funkce není definována v bodě 1, tedy

$\int_0^2 \frac{1}{x-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x-1} dx + \int_1^2 \frac{1}{x-1} dx = \lim_{t\to 1+}[ln|x - 1|]_0^t + \lim_{t\to 1-}[ln|x - 1|]_t^2 =$ $\infty - ln 1 + ln 1 - \infty$, integrál diverguje.