

MINIMALIZACE NÁKLADŮ – řešené příklady

1. Firma má produkční funkci $f(x_1, x_2) = x_1^{1/2} x_2^{1/4}$. Cena vstupu 1 je $w_1 = 2$ a cena vstupu 2 je $w_2 = 1$. Při jaké kombinaci vstupů bude firma minimalizovat náklady na výrobu 1 jednotky výstupu?

Řešení

Firma chce vyrobit množství produkce y s nejnižšími náklady. Řešíme tedy následující úhohu:

$$\min_{x_1, x_2} w_1 x_1 + w_2 x_2$$

za podmínky $f(x_1, x_2) = y$.

Firma má Cobb-Douglasovu produkční funkci. Víme, že izokvanty budou konvexní a hladké a že budou množství obou vstupů v optimu kladná (vnitřní řešení). Sklon izokosty v optimu se tedy rovná sklonu izokvanty. Optimální kombinace vstupů (x_1^*, x_2^*) je řešením následujících dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\text{TRS}(x_1^*, x_2^*) = -\frac{w_1}{w_2}$$

$$y = x_1^{1/2} x_2^{1/4}.$$

Nejdříve si z první rovnice vyjádříme optimální množství vstupu 2 x_2^* :

$$-\frac{MP_1}{MP_2} = -\frac{w_1}{w_2}$$

$$\frac{2x_2^*}{x_1^*} = \frac{2}{1}.$$

$$x_2^* = x_1^* \quad (1)$$

Následně množství vstupu dosadíme do produkční funkce

$$y = x_1^{1/2} x_1^{1/4}$$

$$1 = x_1^{3/4}$$

$$x_1^* = 1.$$

Dosazením do (1) dostaneme optimální množství druhého vstupu $x_2^* = 1$. Srovnajte s příkladem 2 v řešených příkladech Technologie a maximalizace zisku.

2. Firma má produkční funkci $y = 2x_1 + 3x_2$, kde x_1 je množství vstupu 1 a x_2 je množství vstupu 2. Cena vstupu 1 je $w_1 = 4$ a cena vstupu 2 je $w_2 = 5$. Jaké jsou náklady této firmy na výrobu produkce $y = 60$?

Řešení

Vstupy 1 a 2 jsou pro firmu dokonale substituty. Firma bude v optimu nakupovat pouze vstup, se kterým vyrobí dané množství produkce levněji. Nyní si spočítáme náklady na výrobu pomocí obou vstupů.

Kdyby k výrobě použila pouze vstup 1, můžeme si dosazením $x_2 = 0$ do produkční funkce vyjádřit, kolik jednotek vstupu 1 bude potřebovat:

$$y = 2x_1$$

$$x_1 = \frac{y}{2} = \frac{60}{2} = 30.$$

Náklady na výrobu 60 jednotek výstupu pouze pomocí vstupu 1 jsou $w_1 x_1 = 4 \times 30 = 120$. Podobně můžeme spočítat náklady na výrobu 60 jednotek, pokud by firma použila pouze vstup 2. Firma bude k této výrobě potřebovat

$$x_2 = \frac{y}{3} = \frac{60}{3} = 20.$$

Náklady jsou pak $w_2 x_2 = 5 \times 20 = 100$.

Jelikož jsou náklady při použití vstupu 2 nižší než při použití vstupu 1, firma bude vyrábět 60 jednotek výstupu pomocí 20 jednotek vstupu 2 a její náklady budou 100.

