Kapitola 5

Diferenciální počet v $\mathbb{R}^n$

Řešené příklady

1. Gradient a Hessova matice

Zadání. Nalezněte a zapište gradient a Hessovu matici funkce $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + 4x_2^2x_3^2 + 2x_3^4$.

Řešení. Nejprve si zopakujeme jak vypadá gradient funkce a Hessova matice.

Gradient funkce můžeme obecně zapsat jako

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Hessova matice je pak v obecném tvaru zapsána jako

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}.$$

Začneme tedy s výpočtem prvních parciálních derivací funkce. Postupně dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 8x_2x_3^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 8x_2^2x_3 + 8x_3^3$$

a zapíšeme gradient jako

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 \\ 8x_2x_3^2 \\ 8x_2^2x_3 + 8x_3^3 \end{pmatrix}.$$

Pro zápis Hessovy matice potřebujeme vypočítat druhé parciální derivace a smíšené parciální derivace. Postupně opět dostaneme

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = 12x_1^2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} = 8x_3^2 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 16x_2x_3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 16x_2x_3 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3} = 8x_2^2 + 24x_3^2 \end{array}$$

a zapíšeme do matice

$$H = \begin{pmatrix} 12x_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8x_3^2 & 16x_2x_3 \\ 0 & 16x_2x_3 & 8x_2^2 + 24x_3^2 \end{pmatrix}.$$

2. CES funkce

V mnoha ekononomických učebnicích je zmíněna Constant Elasticity of Substitution (CES) produkční funkce

$$Q = \gamma[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}},$$

ve které je elasticita substituce dána jako $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$, $\rho > -1$. Při vhodné úpravě lze tuto rovnici přepsat na Leontiefovu produkční funkci či Cobb–Douglasovu produkční funkci. Tyto produkční funkce získáme při řešení následujících problémů:

$$\lim_{\rho\to\infty} Q = \gamma \min\{K, L\}$$

a

$$\lim_{\rho\to 0} Q = \gamma K^a L^{1-a}.$$

My si nyní načrtneme důkaz, proč tomu tak je.

Důkaz vychází z technik relevantních pro informaci, že CES funkce má formu zobecněného váženého průměru[1]. Uvažujme obecný případ:

$$Q_k = \gamma[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}]^{-\frac{k}{\rho}}, \;\; k > 0,$$

ze kterého odvodíme Leontiefovu produkční funkce a Cobb-Douglasovu produkční funkci.

2. 1. Leontiefova produkční funkce

Jelikož se zajímáme o limitu kdy $\rho \to \infty$, můžeme ignorovat interval, pro který platí $\rho \leq 0$. Uvažujme tedy ρ jako striktně pozitivní. Bez ztráty na obecnosti předpokládejme, že $K \geq L \Rightarrow (1/K^\rho) \leq (1/L^\rho)$ a $K, L > 0$. Nyní ověříme, že platí následující nerovnosti:

$$(1-a)^{k/\rho}(1/L^k) \leq \gamma Q_k^{-1} \leq (1/L^k) \implies (1-a)^{k/\rho}(1/L^k) \leq [a(1/K^\rho) + (1-a)(1/L^\rho)]^{\frac{k}{\rho}} \leq (1/L^k).$$

Umocněním na ρ/k získáváme

$$(1-a)(1/L^\rho) \leq a(1/K^\rho) + (1-a)(1/L^\rho) \leq (1/L^\rho).$$

Předchozí rovnice vzhledem k předpokladům platí. Nyní využijme první element výrazu zmíněného dříve a limitním přechodem pro $\rho \to \infty$ dostaneme

$$\lim_{\rho\to\infty} (1-a)^{k/\rho}(1/L^k) = (1/L^k).$$

[1]Založeno na publikaci Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S., Solow, R. M. (1961). Capital-labor substitution and economic efficiency. The Review of Economics and Statistics, 225-250.

Díky tomuto výsledku lze ukázat, že platí

$$\lim_{\rho\to\infty} Q_k = \frac{\gamma}{1/L^k} = \gamma L^k = \gamma\big[\min\{K,L\}\big]^k.$$

Jednoduchým dosazením $k = 1$ pak získáváme Leontiefovu produkční funkci.

2. 2. Cobb–Douglasova produkční funkce

V prvním kroku zapíšeme funkci pomocí exponenciálu jako

$$\gamma^{-1}Q_k = \exp\left\{-\frac{k}{\rho}\cdot\ln\left[a(K^\rho)^{-1} + (1-a)(L^\rho)^{-1}\right]\right\}.$$

Ve druhém kroku využijeme Maclaurinův rozvoj prvního řádu (Taylorův rozvoj soustředěný na nulu) vzhledem k ρ:

$$a(K^\rho)^{-1} + (1-a)(L^\rho)^{-1} = a(K^0)^{-1} + (1-a)(L^0)^{-1} - a(K^0)^{-2}K^0\rho\ln K - (1-a)(L^0)^{-2}L^0\rho\ln L + O(\rho^2) =$$

$$= 1 - \rho a\ln K - \rho(1-a)\ln L + O(\rho^2) = 1 + \rho\big[\ln K^{-a}L^{-(1-a)}\big] + O(\rho^2).$$

Dosazením výrazu zpět do exponenciální funkce získáme

$$\gamma^{-1}Q_k = \Big(1 + \rho\big[\ln K^{-a}L^{-(1-a)}\big] + O(\rho^2)\Big)^{-k/\rho}.$$

V dalším kroku definujeme $r \equiv 1/\rho$ a předchozí výraz přepíšeme do tvaru

$$\gamma^{-1}Q_k = \left(1 + \frac{\big[\ln K^{-a}L^{-(1-a)}\big]}{r} + O(r^{-2})\right)^{-kr}$$

Náš výsledek nyní vypadá jako výraz, jehož limita v nekonečnu nám dá něco exponenciálního:

$$\lim_{\rho\to 0}\gamma^{-1}Q_k = \lim_{r\to\infty}\gamma^{-1}Q_k = \Big(\exp\Big\{\ln K^{-a}L^{-(1-a)}\Big\}\Big)^{-k}$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0} Q_k = \gamma\left(K^a L^{1-a}\right)^k$$

Stupeň homogenity k naší funkce je zachován a pokud $k = 1$, dostaneme Cobb–Douglasovu funkci.

3. Log–linearizace

Řešení mnoha dynamických ekonomických optimalizačních problémů vede na soustavu několika (často i desítek) diferenčních rovnic. Ve všeobecnosti pro takovou soustavu rovnic nemusí existovat explicitní řešení. Z tohoto důvodu se využívají aproximační metody, konkrétně v ekonomii je velmi častým přístupem právě technika nazývaná log–linearizace. Přínosem log–linearizace je lineární aproximace soustavy diferenčních rovnic, jejíž řešení je z matematického hlediska dobře prostudované. Za jistých podmínek pak dokážeme najíst alespoň jedno takové řešení.

Před tím, než přejdeme k samotné log–linearizaci, je nutné si připomenout několik matematických základů. Začneme Taylorovým polynomem, který se používá jako polynomická aproximace funkce. Uvažujme funkci f jedné proměnné x, která má derivace všech řádů. Potom podle Taylorovy věty můžeme tuto funkci rozvinout jako Taylorovu řadu v okolí bodu x_0, tj. platí

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{5.1}$$

Pokud je f dostatečně hladká, budou derivace vyšších řádů blízké nule (zanedbatelné), a proto můžeme psát

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{5.2}$$

Tyto výsledky můžeme bez újmy na obecnosti rozšířit na funkce více proměnných. Pro jednoduchost předpokládejme, že nyní je f funkce dvou proměnných x a y. Lineární aproximace této funkce v okolí bodu (x_0, y_0) je potom

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0), \tag{5.3}$$

kde f'_x a f'_y značí příslušné parciální derivace.V makroekonomickém modelování se obvykle za bod x_0, resp. y_0 volí ustálený stav (steady state), který budeme v dalším textu značit x^*, resp. y^*.

Při log–linearizaci budeme pracovat s tzv. logaritmickými odchylkami od ustálených stavů (značené vlnkou), které jsou definované jako

$$\widetilde{x}_t \equiv \ln \frac{x_t}{x^*} = \ln x_t - \ln x^*. \tag{5.4}$$

Dále platí

$$\boxed{\widetilde{x}_t} = \ln \frac{x_t}{x^*} = \ln \left(1 + \frac{x_t - x^*}{x^*}\right) \approx \boxed{\frac{x_t - x^*}{x^*}}, \tag{5.5}$$

přičemž uvedená aproximace pochází z Taylorova polynomu řádu 1 v okolí bodu x^* (o čemž se můžete sami přesvědčit, stačí však ekvivalentně ukázat, že $\ln(1 + x) \approx x$ pro x blízké nule). Poslední výraz v rovnici (5.5) se nazývá procentuální odchylka od steady state, a proto se v okolí steady state logaritmické a procentuální odchylky aproximativně rovnají.

Přímo z rovnice (5.5) dostáváme aproximaci

$$x_t \approx x^*(1 + \widetilde{x}_t), \tag{5.6}$$

jejíž aplikace na původní rovnici (kterou chceme log–linearizovat) se v literatuře nazývá substituční metoda. Tento postup se často používá v lineárních rovnicích.

Nyní ještě uvedeme poslední obvyklý přístup log–linearizace, a to přes exponenciální funkci. Z rovnice (5.4) máme

$$\ln x_t = \ln x^* + \widetilde{x}_t, \tag{5.7}$$

a po aplikaci exponenciální funkce dostaneme

$$x_t = \mathrm{e}^{\ln x^* + \widetilde{x}_t} = \mathrm{e}^{\ln x^*}\, \mathrm{e}^{\widetilde{x}_t} = x^*\, \mathrm{e}^{\widetilde{x}_t}. \tag{5.8}$$

Dále použijeme Taylorův polynom prvního řádu funkce $\mathrm{e}^{\widetilde{x}_t}$ v bode $x^* = 0$, čímž dostaneme (přesvědčte se sami)

$$\mathrm{e}^{\widetilde{x}_t} \approx 1 + \widetilde{x}_t. \tag{5.9}$$

Po dosazení do (5.8) získáme opět rovnici (5.6). Linearizování rovnic přes exponenciálu je typické pro komplikovanější rovnice, zvláště pokud již původní rovnice obsahují exponenciální člen.

V tomto momentě už máte všechny potřebné znalosti na to, abyste pochopili základní myšlenku log–linearizace. Začneme všeobecnějším příkladem, na kterém bude jasně vidět celý obvyklý postup.

Předpokládejme, že máme následující nelineární funkční závislost

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \tag{5.10}$$

kde f, g a h jsou nějaké funkce jedné proměnné, jejichž první derivace existuje. Pro jednoduchost budeme ještě abstrahovat od časové složky, což si můžeme přestavit i tak, že uvažujeme jen jeden fixně daný časový okamžik. Logaritmováním rovnice získáváme

$$\ln f(x) = \ln \frac{g(x)}{h(x)} = \ln g(x) - \ln h(x). \tag{5.11}$$

Nyní aplikujeme Taylorův polynom prvního řádu na funkce $\ln f(x)$, $\ln g(x)$ a $\ln h(x)$ v okolí nějaké pevně ustálené hodnoty x^*. Dostáváme tedy

$$\ln f(x) \approx \ln f(x^*) + \frac{f'(x^*)}{f(x^*)}(x - x^*), \tag{5.12}$$

$$\ln g(x) \approx \ln g(x^*) + \frac{g'(x^*)}{g(x^*)}(x - x^*), \tag{5.13}$$

$$\ln h(x) \approx \ln h(x^*) + \frac{h'(x^*)}{h(x^*)}(x - x^*). \tag{5.14}$$

Lineární aproximace tak vede na rovnici

$$\ln f(x^*) + \frac{f'(x^*)}{f(x^*)}(x - x^*) = \ln g(x^*) + \frac{g'(x^*)}{g(x^*)}(x - x^*) - \ln h(x^*) - \frac{h'(x^*)}{h(x^*)}(x - x^*). \tag{5.15}$$

Protože současně z funkční závislosti (5.11) platí

$$\ln f(x^*) = \ln g(x^*) - \ln h(x^*), \tag{5.16}$$

tyto členy se navzájem vyruší a my dostaneme

$$\frac{f'(x^*)}{f(x^*)}(x - x^*) = \frac{g'(x^*)}{g(x^*)}(x - x^*) - \frac{h'(x^*)}{h(x^*)}(x - x^*). \tag{5.17}$$

Rovnici (5.17) vynásobíme a vydělíme členem x^* (vlastně jen rozšíříme celou rovnici jedničkou, její platnost tedy zůstane zachovaná), čímž získáme

$$\frac{x^* f'(x^*)}{f(x^*)} \frac{(x - x^*)}{x^*} = \frac{x^* g'(x^*)}{g(x^*)} \frac{(x - x^*)}{x^*} - \frac{x^* h'(x^*)}{h(x^*)} \frac{(x - x^*)}{x^*}. \tag{5.18}$$

V posledním kroku si už jen uvědomíme, že procentní odchylka se aproximativně rovná logaritmické, čímž získáme finální výsledek

$$\frac{x^* f'(x^*)}{f(x^*)} \widetilde{x} = \frac{x^* g'(x^*)}{g(x^*)} \widetilde{x} - \frac{x^* h'(x^*)}{h(x^*)} \widetilde{x}. \tag{5.19}$$

Všeobecně při log–linearizaci postupujeme v následujících krocích:

1. zlogaritmujeme obě strany rovnice;
2. dané funkce rozvineme do Taylorovy řady prvního stupně, obvykle v okolí steady state;
3. upravujeme tak dlouho, dokud nejsou všechny původní proměnné vyjádřené v logaritmických (procentuálních) odchylkách.

V následující části si ukážeme několik ekonomických příkladů log–linearizace pro pochopení jistých klíčových algebraických úprav, které jsou v odborné literatuře obvyklé.

3. 1. Multiplikativní závislost

Zadání. V okolí steady state log–linearizujte Cobb–Douglasovu produkční funkci

$$y_t = a_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}, \tag{5.20}$$

kde y_t značí produkt, a_t úroveň technologie, k_t množství kapitálu, n_t pracovní sílu a $\alpha \in (0,1)$ je marginální (mezní) produkt kapitálu.

Řešení. Budeme postupovat přesně podle tří kroků uvedených výše. Nejprve tedy celou rovnici zlogaritmujeme, tj.

$$\ln y_t = \ln a_t + \alpha \ln k_t + (1-\alpha)\ln n_t. \tag{5.21}$$

Dále obě strany rovnice rozvineme do Taylorova polynomu prvního stupně v okolí steady state a získáme

$$\ln y^* + \frac{1}{y^*}(y_t - y^*) = \ln a^* + \frac{1}{a^*}(a_t - a^*) + \alpha \ln k^* + \frac{\alpha}{k^*}(k_t - k^*) + (1-\alpha)\ln n^* + \frac{(1-\alpha)}{n^*}(n_t - n^*). \tag{5.22}$$

V posledním kroku se věnujeme úpravě. Nejprve si všimneme, že

$$\ln y^* = \ln a^* + \alpha \ln k^* + (1-\alpha)\ln n^*, \tag{5.23}$$

a tyto členy se v rovnici (5.22) vyruší. Máme tedy

$$\frac{1}{y^*}(y_t - y^*) = \frac{1}{a^*}(a_t - a^*) + \frac{\alpha}{k^*}(k_t - k^*) + \frac{(1-\alpha)}{n^*}(n_t - n^*). \tag{5.24}$$

V tomto momentě už jen využijeme znalosti, že se procentuální odchylky aproximativně rovnají logaritmickým odchylkám, takže výsledek je ve tvaru

$$\widetilde{y}_t = \widetilde{a}_t + \alpha \widetilde{k}_t + (1-\alpha)\widetilde{n}_t. \tag{5.25}$$

Porovnejte tento výsledek s původní rovnicí.

3. 2. Lineární závislost

Zadání. Uvažujme účetní identitu v uzavřené ekonomice s nulovými vládními výdaji danou jako

$$y_t = c_t + i_t, \tag{5.26}$$

tedy celkový výstup je roven součtu spotřeby a investic v modelové ekonomice. Log–linearizujte rovnici (5.26) v okolí steady state.

Řešení. Postupujeme analogicky jako v předešlém příkladu. Tuto rovnici zlogaritmujeme a získáme

$$\ln y_t = \ln(c_t + i_t). \tag{5.27}$$

Následný Taylorův polynom prvního stupně v okolí steady state vede na

$$\ln y^* + \frac{1}{y^*}(y_t - y^*) = \ln(c^* + i^*) + \frac{1}{c^* + i^*}(c_t - c^*) + \frac{1}{c^* + i^*}(i_i - i^*), \tag{5.28}$$

přičemž si musíme uvědomit, že na pravé straně máme funkci dvou proměnných, takže aproximujeme podle vztahu (5.3). Dále platí

$$\ln y^* = \ln(c^* + i^*), \tag{5.29}$$

což nám rovnici (5.28) zjednoduší na tvar

$$\frac{1}{y^*}(y_t - y^*) = \frac{1}{c^* + i^*}(c_t - c^*) + \frac{1}{c^* + i^*}(i_i - i^*). \tag{5.30}$$

Navíc speciálně také platí $y^* = c^* + i^*$, proto

$$\frac{1}{y^*}(y_t - y^*) = \frac{1}{y^*}(c_t - c^*) + \frac{1}{y^*}(i_i - i^*). \tag{5.31}$$

Už jen provedeme úpravu trikem, a to tak, že první člen na pravé straně vydělíme a vynásobíme c^* a druhý člen vydělíme a vynásobíme i^*, a tedy po zavedení vlnovkového značení máme konečně

$$\widetilde{y}_t = \frac{c^*}{y^*}\widetilde{c}_t + \frac{i^*}{y^*}\widetilde{i}_t. \tag{5.32}$$

Řešení. Jednodušším způsobem je využít již odvozený vztah (5.6). Přímou aplikací na rovnici (5.26) obdržíme

$$y^*(1 + \widetilde{y}_t) = c^*(1 + \widetilde{c}_t) + i^*(1 + \widetilde{i}_t). \tag{5.33}$$

Po roznásobení a využití faktu, že $y^* = c^* + i^*$ máme

$$y^*\widetilde{y}_t = c^*\widetilde{c}_t + i^*\widetilde{i}_t, \tag{5.34}$$

odkud vydělením y^* dostáváme stejný výsledek jako v předešlém řešení. Vidíme, že tento postup byl značně časově kratší, zato je poměrně limitující na funkční tvar. Sami si můžete vyzkoušet, jak bude vypadat log–linearizace za předpokladu, že vládní výdaje g_t nejsou nulové.

V tomto okamžiku může ještě vyvstat otázka, proč jsme log–linearizovali rovnici, která je původně lineární. Musíme si uvědomit, že v ekonomických modelech pracujeme s několika rovnicemi současně, přičemž tyto rovnice nejsou všechny nutně lineární. Log–linearizací jsme tak převedli lineární rovnici v původních proměnných na lineární rovnici v logaritmických (procentuálních) odchylkách. Pokud bychom původní rovnici „nelog–linearizovali“, dostali bychom například v případě výstupu samotný výstup y_t, zatímco například v předešlém příkladě jeho odchylku od steady state $\widetilde{y}_t$, což jsou dvě různé veličiny.

Neřešené příklady

Matematické příklady

1. Získejte parciální derivace funkce $y = x_1^2 x_2$. Při výpočtu využijte definici parciální derivace.

2. Pro následující funkce:

   (a) nalezněte první parciální derivace

   (b) nalezněte druhé parciální derivace a smíšené parciální derivace

   (c) určete hodnotu každé parciální derivace pro $x_1 = 1$ a $x_2 = 4$

   - $y = f(x_1, x_2) = 12{x_1}^4 - 6{x_1}^2 x_2 + 4{x_2}^3$
   - $y = f(x_1, x_2) = (3{x_1}^2 + 5x_1 + 1)(x_2 + 4)$
   - $y = f(x_1, x_2) = \frac{(7x_1 - x_1 {x_2}^2)}{x_1 - 2}$
   - $y = f(x_1, x_2) = (2e^{x_1})(e^{2x_1} {x_2}^2)$
   - $y = f(x_1, x_2) = 2 \ln 3x_1 - 4 \ln 2x_1 x_2$
   - $y = f(x_1, x_2) = {x_1}^2 + 2x_1 {x_2}^{1/2} - 4x_2$
   - $y = f(x_1, x_2) = (x_1^2 + 2x_2^2) e^{-x_1^2 - x_2^2}$
   - $y = f(x_1, x_2) = (x_1^2 - 2x_2^2) e^{x_1 - x_2}$

3. Nalezněte gradient funkce $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$.

4. Nalezněte gradient a Hessovu matici pro funkci $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$. Na tomto příkladu demonstrujte platnost Youngova teorému.

5. Uvažujte funkci $f(w, x, y, z) = \alpha w^\gamma + \frac{\beta x}{\theta y} \ln(\psi z)$.

   (a) Nalezněte čtyři parciální derivace a čtyři druhé parciální derivace této funkce.

   (b) Nalezněte smíšené parciální derivace $f_{xz}(w, x, y, z)$ a $f_{wy}(w, x, y, z)$.

   (c) Určete kolik unikátních smíšených parciálních derivací může být podle Youngova teorému získáno z původní funkce.

6. Ukažte, že je produkční funkce $y = f(K, L) = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{2}{3}}$ homogenní se stupněm homogenity $\frac{7}{6}$.

7. Ukažte, že je produkční funkce $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma$ homogenní se stupněm homogenity $\alpha + \beta + \gamma$.

8. Určete stupeň homogenity pro následující funkce:

   (a) $f(K, L) = \sqrt{KL}$

   (b) $f(K, L) = \sqrt{K} + \sqrt{L}$

   (c) $f(K, L) = K^2 + L^2$

9. Určete stupeň homogenity CES produkční funkce $y = \gamma \left[aK^{-\rho} + (1 - a) L^{-\rho} \right]^{\frac{1}{-\rho}}$. Ukažte že pro tuto funkci platí Eulerův teorém $f_1 x_1 + f_2 x_2 = f(x_1 . x_2)$.

Ekonomické příklady

1. Najděte a interpretujte parciální derivace produkční funkce $y = 10x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$. Graficky znázorněte sklon parciální derivace $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ v bodech $[x_1, x_2] = [25, 4]$ a $[x_1, x_2] = [25, 9]$.

2. Uvažujte produkční funkci ve tvaru:
$$y = 10L^{1/2}K^{1/2},$$
kde L je množství práce a K je množství kapitálu použitých ve výrobě. Dále předpokládejte, že kapitál je konstantní s hodnotou $K_0 = 64$.

   (a) Pokud je reálná mzda ekvivalentní meznímu produktu práce, takže platí: $w = \alpha A(\frac{K}{L})^{1-\alpha} = 10$, jaké množství práce bude poptáváno? Co se stane s poptávkou po práci, když se reálná mzda sníží na $w = 8$?

   (b) Nyní předpokládejte, že kapitál použitý ve výrobním procesu není konstantní a může vzrůst až na $K = 100$. Pokud reálná mzda zůstane konstantní $w = 8$, jaké množství práce bude poptáváno?

   (c) Nalezněte smíšené parciální derivace této produkční funkce a vysvětlete, jaká je intuice za znaménky vašich výsledků.

3. Předpokládejte, že poptávka po cukru je funkcí příjmu (Y), ceny cukru (P_s) a ceny sacharinu (P_c) (substitutu cukru) a má tvar:
$$Q_d = f(Y, P_c, P_s) = 0,05Y + 10P_c - 5{P_s}^2$$

   (a) Nalezněte parciální derivace této funkce.

   (b) Elasticita poptávky podle příjmu je definovaná jako:
$$\frac{\partial Q_d}{\partial Y}\frac{Y}{Q_d}.$$
   Vypočítejte elasticitu poptávky podle příjmu, pokud víte, že $Y = 10000$, $P_s = 5$ a $P_c = 7$.

   (c) Cenová elasticita poptávky je definovaná jako:
$$\frac{\partial Q_d}{\partial P_s}\frac{P_s}{Q_d}.$$
   Vypočítejte cenovou elasticitu poptávky, pokud víte, že $Y = 10000$, $P_s = 5$ a $P_c = 7$.

   (d) Křížová elasticita pro cukr a sacharin je definována jako:
$$\frac{\partial Q_d}{\partial P_c}\frac{P_c}{Q_d}.$$
   Vypočítejte křížovou elasticitu poptávky, pokud víte, že $Y = 10000$, $P_s = 5$ a $P_c = 7$.

4. Najděte a interpretujte mezní produkt Cobb–Douglasovy produkční funkce se dvěma vstupy:
$$y = f(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}, \quad A > 0, 0 < \alpha, \beta < 1,$$
kde A, α a β jsou parametry.

5. Najděte a interpretujte mezní produkt Cobb–Douglasovy produkční funkce se třemi vstupy:
$$y = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}x_3^{\gamma}, \quad A > 0, 0 < \alpha, \beta, \gamma < 1,$$
kde A, α, β a γ jsou parametry.

6. Najděte mezní produkt CES produkční funkce $y(x_1, x_2)$.

$$y(x_1, x_2) = 12\left[0,4x_1^{-\frac{1}{2}} + 0,6x_2^{-\frac{1}{2}}\right]^{-2}$$

7. Ukažte, jak lze z CES produkční funkce $y = \gamma\left[aK^{-\rho} + (1-a)L^{-\rho}\right]^{\frac{k}{-\rho}}$ získat:

   (a) Leontiefovu produkční funkci

   (b) Cobb–Douglasovu produkční funkci

   (c) Produkční funkci se vstupy typu dokonalých substitutů

8. Najděte a interpretujte Hessovu matici Cobb–Douglasovy produkční funkce se dvěma vstupy:

$$y = Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}, \quad A > 0, 0 < \alpha, \beta < 1,$$

   kde A, α, β jsou parametry.

9. V okolí ustáleného stavu log-linearizujte Cobb–Douglasovu produkční funkci

   (a) $y_t = An_t^{1-\alpha}$,

   (b) $y_t = Ak_t^{\alpha}$,

   (c) $y_t = Ak_t^{\alpha}n_t^{1-\alpha}$,

   kde y_t značí produkt, A úroveň technologie, k_t množství kapitálu, n_t pracovní sílu a $\alpha \in (0,1)$ je marginální (mezní) produkt kapitálu.

10. Z mikroekonomické teorie se dá ukázat, že domácnosti mající užitkovou funkci s konstantní averzí k riziku (CRRA) řeší svůj mezičasový problém optimální spotřeby jako

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\sigma} = \beta(1 + r_t),$$

    kde c_{t+1} a c_t je spotřeba ve dvou po sobě jdoucích obdobích, r_t je nominální úroková míra, β značí diskontní faktor a nakonec σ je převrácená hodnota elasticity substituce pro spotřebu. Log–linearizujte tuto rovnici v okolí ustáleného stavu.

11. Log–linearizujte rovnici opotřebení kapitálu

$$k_{t+1} = i_t + (1-\delta)k_t$$

    v okolí ustáleného stavu, kde k_{t+1} a k_t je množství kapitálu ve dvou po sobě jdoucích obdobích, i_t množství investicí a $\delta \in [0,1]$ parametr opotřebení kapitálu.

12. Určete, zda následující produkční funkce vykazují konstantní, klesající nebo rostoucí výnosy z rozsahu. Výsledky interpretujte.

    (a) $f(K, L) = \frac{K^2}{L}$

    (b) $f(K, L) = K + L$

    (c) $f(K, L) = AK^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{5}}$

Seznam použité literatury

[1] ČAPEK, Jan. Přednáška Ekonomická rovnováha, Makroekonomie 2. Dostupné z: https://is.muni.cz/auth/el/1456/jaro2019/MPE_MAE2/um/Rovnovaha.pptx

[2] HOY, Michael. Mathematics for economics. 3rd ed. Cambridge, Mass.: MIT Press, c2011. ISBN 978-0-262-01507-3.

[3] KLEIN, Michael W. Mathematical methods for economics. 2nd ed. Boston: Addison-Wesley, c2002. ISBN 0-201-72626-2

[4] RAMÍK, J. Ekonomicko-matematické metody 3. Dostupné z: https://archiv.elearning.opf.slu.cz.

[5] SYDSÆTER, Knut a Peter J. HAMMOND. Essential mathematics for economic analysis. 3rd ed. Harlow: Prentice-Hall, 2008. ISBN 978-0-273-71324-1.

[6] ZIETZ, JOACHYM. Log-Linearizing Around the Steady State: A Guide with Examples. Dostupné z: https://www.macroeconomics.tu-berlin.de/fileadmin/fg124/advanced-macro/2014/Log-Linearization.pdf.