Kapitola 8

Maximalizace s omezujícími podmínkami

Řešené příklady

Postačující podmínka pro maximum při jednom omezení: Uvažujme Lagrangeovu funkci skládající se z funkce s n argumenty a jednoho omezení. Nechť má determinant ohraničené Hessovy matice Lagrangeovy funkce vyhodnocený ve stacionárním bodě stejné znaménko jako $(-1)^n$ a poslední $n-1$ vedoucí hlavní minory mění znaménka, pak je kvadratická forma negativně–definitní na omezení a stacionární bod je maximem funkce.

Postačující podmínka pro minimum při jednom omezení: Uvažujme Lagrangeovu funkci skládající se z funkce s n argumenty a jednoho omezení. Nechť jsou všechny poslední $n-1$ vedoucí hlavní minory, ohraničené Hessovy matice vyhodnocené ve stacionárním bodě, záporné, spolu se samotným determinantem ohraničené Hessovy matice, pak je kvadratická forma pozitivně–definitní na omezení a stacionární bod je minimem funkce.

Pokud jsou tyto podmínky porušeny $n-1$ nenulovými vedoucími hlavními minory, pak stacionární bod není ani maximem ani minimem.

Mějme Lagrangeovu funkci $L = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda(g(x_1, \ldots, x_n) - c)$. Ohraničená Hessova matice má tvar:

$$BH = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 & \ldots & g_n \\ g_1 & f_{11} - \lambda g_{11} & f_{12} - \lambda g_{12} & \ldots & f_{1n} - \lambda g_{1n} \\ g_2 & f_{12} - \lambda g_{12} & f_{22} - \lambda g_{22} & \ldots & f_{2n} - \lambda g_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_n & f_{1n} - \lambda g_{1n} & f_{2n} - \lambda g_{2n} & \ldots & f_{nn} - \lambda g_{nn} \end{pmatrix},$$

kde g_i je parciální derivace $g(x_1, \ldots, x_n)$ podle i-tého argumentu a g_{ij} je druhá parciální derivace podle i-tého a j-tého argumentu.

1. Řešení vázaných extrémů skrz substituci - Intratemporální problém spotřebitele[1]

Předpokládejme, že máme 6 eur na oběd a navštívíme slovenské bistro, které nabízí hlavní jídlo (H) a přílohu (P) na váhu. Sto gramů hlavního jídla stojí 0,5 eur a sto gramů přílohy 0,25 eur. Naše užitková

[1] Příklad vychází z Klein (2014).

funkce má tvar $U(H,P) = \frac{\ln H}{4} + \frac{\ln P}{2}$. Kolik gramů hlavního jídla a přílohy si můžeme zakoupit aby byl náš užitek z oběda maximální?

Řešení:
V tomto problému máme za úkol maximalizovat funkci U za podmínky rozpočtového omezení $6 = \frac{P}{4} + \frac{H}{2}$. Problém budeme řešit substituční metodou. V následujícím kroku se budeme snažit převést problém maximalizace užitku funkce více proměnných na problém maximalizace užitku jedné proměnné.

V prvním kroku si z rovnice podmínky rozpočtového omezení vyjádříme jednu z proměnných

$$6 = \frac{P}{4} + \frac{H}{2} \Rightarrow H = 12 - \frac{P}{2},$$

kterou následně dosadíme do naší užitkové funkce a získáme jednorozměrnou užitkovou funkci $U(P)$

$$U(P) = \frac{\ln\left(12 - \frac{P}{2}\right)}{4} + \frac{\ln P}{2}.$$

Derivací funkce $U(P)$ dle proměnné P a jejím položením rovno nule získáme množství přílohy, které nám bude maximalizovat užitek

$$\frac{dU(P)}{dP} = \frac{-1}{96 - 4P} + \frac{1}{2P} = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 16.$$

Zpětným dosazením do rozpočtového omezení zjistíme, že hlavního jídla si pořídíme

$$H = 12 - \frac{P}{2} = 12 - \frac{16}{2} = 4.$$

Náš užitek bude tedy maximalizován při volbě 1600 gramů přílohy a 400 gramů hlavního jídla.

Nyní si ukážeme, jak ověřit maximum pomocí ohraničené Hessovy matice. Naše Lagrangeova funkce má tvar:

$$L = \frac{\ln H}{4} + \frac{\ln P}{2} - \lambda\left(\frac{P}{4} + \frac{H}{2} - 6\right)$$

Vyjádříme si tedy postupně potřebné derivace a zapíšeme ohraničenou Hessovu matici

$$L_{HH} = -\frac{1}{4H^2}, \quad L_{PP} = -\frac{1}{2P^2}, \quad L_{HP} = L_{PH} = 0$$

$$g_H = \frac{1}{2}, \quad g_P = \frac{1}{4}$$

$$BH = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4H^2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2P^2} \end{pmatrix}.$$

Jelikož podmínka $n-1$ posledních hlavních minorů je v našem případě rovna $2-1=1$ stačí nám znaménko determinantu celé ohraničené Hessovy matice. Spočítáme tedy tento determinant a dostáváme $|BH| = \frac{1}{64H^2} + \frac{1}{8P^2}$. Dosadíme hodnoty našeho vypočítaného bodu a dostáváme $|BH| > 0$. Vidíme, že podmínka $(-1)^2 = 1$ je splněna a příslušná kvadratická forma je negativně–definitní. Stacionární bod je tedy maximem zadané funkce.

2. Omezení ve tvaru rovností - Intratemporální problém firmy maximalizující zisk[2]

Mějme produkční funkce firmy ve tvaru $Q = 20u^{0,3}v^{0,2}w^{0,5}$, kde u, v a w jsou množství vstupů U, V a W za rok, které firma využívá k produkci homogenního výstupu Q. Ceny za jednotky vstupů U, V a W jsou postupně $P_u = 1\,000$ Kč, $P_v = 2\,500$ Kč, $P_w = 4\,000$ Kč a roční rozpočet na produkci je 1 000 000 Kč. Najděte optimální alokaci vstupů tak, aby firma maximalizovala svůj výstup.

Řešení:
Nyní máme za úkol maximalizovat funkci Q za podmínky $1000u + 2500v + 4000w = 1000000$. Oproti prvnímu případu (kde šlo snadno využít metodu substituce nyní využijeme obecnější Lagrangeův přístup řešení vázaných extrémů. Příslušná Lagrangeova funkce má tvar

$$L(u, v, w, \lambda) = 20u^{0,3}v^{0,2}w^{0,5} - \lambda(1000u + 2500v + 4000w - 1000000).$$

K nalezení extrému funkce $L(u, v, w, \lambda)$ je nutné v prvním kroku spočítat první parciální derivace a položit je rovny nule, tj.

$$L_u = 6u^{-0,7}v^{0,2}w^{0,5} - 1000\lambda = 0, \tag{8.1}$$

$$L_v = 4u^{0,3}v^{-0,8}w^{0,5} - 2500\lambda = 0, \tag{8.2}$$

$$L_w = 10u^{0,3}v^{0,2}w^{-0,5} - 4000\lambda = 0. \tag{8.3}$$

Z rovnic (8.1) a (8.3) následně vyjádříme λ a porovnáme, čímž dostaneme

$$\tfrac{6v^{0,2}w^{0,5}}{1000u^{0,7}} = \tfrac{10u^{0,3}v^{0,2}}{4000w^{0,5}} \Rightarrow 24000w = 10000u \Rightarrow u = 2{,}4w.$$

Obdobně vyjádříme λ z (8.2) a (8.3) a opět porovnáme, tj.

$$\tfrac{4u^{0,3}w^{0,5}}{2500v^{0,8}} = \tfrac{10u^{0,3}v^{0,2}}{4000w^{0,5}} \Rightarrow 16000w = 25000v \Rightarrow v = 0{,}64w.$$

V posledním kroku za u a v dosadíme do vazebné podmínky, z čehož získáme

$$1000 \cdot 2{,}4w + 2500 \cdot 0{,}64w + 4000w = 1000000 \quad \Rightarrow \quad w = 125.$$

Postupným dosazováním z výše uvedených rovnic získáme potenciální optimální alokaci vstupů maximalizujících výstup jako $w = 125, v = 80, u = 300$. Abychom ověřili, zda se skutečně jedná o extrém, vypočteme hodnoty druhých parciálních derivací v bodě $(300, 80, 125)$, tedy

$$\begin{gathered} L_{uu} = -4,2u^{-1,7}v^{0,2}w^{0,5} \rightsquigarrow -0,007, \quad L_{vv} = -3,2u^{0,3}v^{-1,8}w^{0,5} \rightsquigarrow -0,074, \\ L_{ww} = -5u^{0,3}v^{0,2}w^{-1,5} \rightsquigarrow -0,048, \quad L_{uv} = 1,2u^{-0,7}v^{-0,8}w^{0,5} \rightsquigarrow 0,007, \\ L_{uw} = 3u^{-0,7}v^{0,2}w^{-0,5} \rightsquigarrow 0,012, \quad L_{vw} = 2u^{0,3}v^{-0,8}w^{-0,5} \rightsquigarrow 0,03 \end{gathered}$$

a následně dopočítáme vedoucí hlavní minory Hessovy matice, tj.

$$|-0,007| < 0, \quad \begin{vmatrix} -0,007 & 0,007 \\ 0,007 & -0,074 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} -0,007 & 0,007 & 0,012 \\ 0,007 & -0,074 & 0,03 \\ 0,012 & 0,03 & -0,048 \end{vmatrix} < 0.$$

Hessova matice je negativně definitní, Lagrangeova funkce je tedy ostře konkávní a proto se jedná o vázané lokální maximum. Aby firma maximalizovala výstup, měla by k jeho produkci využít 300 jednotek vstupu U, 80 jednotek vstupu V a 125 jednotek vstupu W.

[2] Příklad vychází z Vavrečková (2014).

3. Omezení ve tvaru nerovností[3]

Firma vyrábí dva typy produktů – typ A a typ B. Jestliže si účtuje cenu p_A za jednotku produktu A a cenu p_b za jednotku produktu B, potom prodá q_A jednotek produktu A a q_B jednotek produktu B, kde $q_A = 400 - 2p_A + p_B$ a $q_B = 200 + p_A - p_B$. K výrobě jedné jednotky produktu A potřebuje firma 2 hodiny práce a 1 jednotku materiálu. Pro výrobu jedné jednotky produktu B potřebuje 3 hodiny práce a 2 jednotky materiálu. Firma má k dispozici maximálně 1 000 hodin práce a 200 jednotek materiálu. Maximalizujte celkový příjem firmy, který je dán vztahem $400p_A + 200p_B - 2p_A^2 - p_B^2 + 2p_Ap_B$.

Řešení:
Ze zadání je zřejmé, že platí časové omezení $1000 \geq 2q_A + 3q_B$, což odpovídá celkové práci spotřebované na oba produkty, a materiální omezení $200 \geq q_A + 2q_B$, což udává spotřebu celkového materiálu na oba produkty. Do obou rovnic dosadíme za q_A a q_B konkrétní tvary individuálních poptávek po obou statcích a tím získáme dvě omezení, která jsou ve tvaru $-p_A - p_B \leq -400$ a $-p_B \leq -600$. Nyní je třeba ověřit kvalifikační omezení. Vytvoříme Jakobiho matici a určíme její hodnost, tedy

$$D\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hodnost matice je 2, takže rovnost může nastat v případě obou omezení a my můžeme zapsat Lagrangeovu funkci

$$L(p_A, p_B, \mu_1, \mu_2) = 400p_A + 200p_B - 2p_A^2 - p_B^2 + 2p_Ap_B - \mu_1(-p_A - p_B + 400) - \mu_2(-p_B + 600)$$

a z ní příslušné Kuhnovy–Tuckerovy podmínky

$$L_{p_A} = 400 - 4p_A + 2p_B + \mu_1 = 0, \tag{8.4}$$
$$L_{p_B} = 200 - 2p_B + 2p_A + \mu_1 + \mu_2 = 0, \tag{8.5}$$
$$\mu_1(-p_A - p_B + 400) = 0, \tag{8.6}$$
$$\mu_2(-p_B + 600) = 0, \tag{8.7}$$
$$\mu_1, \mu_2 \geq 0. \tag{8.8}$$

Budeme uvažovat 4 následující případy:

1. Obě omezení jsou neaktivní, takže z podmínek komplementarity (8.6) a (8.7) plyne, že $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Potom z (8.4) a (8.5) získáme soustavu
$$\begin{aligned} 400 - 4p_A + 2p_B &= 0, \\ 200 - 2p_B + 2p_A &= 0, \end{aligned}$$
jejímž řešením je $p_A = 300$ a $p_B = 400$. Toto řešení ovšem porušuje druhou vazebnou podmínku.

2. První omezení je aktivní a druhé neaktivní, takže $\mu_2 = 0$. Z prvního omezení si vyjádříme $p_A = 400 - p_B$. Dosazením do (8.4) a (8.5) získáme soustavu
$$\begin{aligned} 400 - 4(400 - p_B) + 2p_B + \mu_1 &= 0, \\ 200 - 2p_B + 2(400 - p_B) + \mu_1 &= 0, \end{aligned}$$
ze které dostaneme řešení $p_B = 220$, $p_A = 180$ a $\mu_1 = -120$, což je ve sporu s (8.8).

3. První omezení je neaktivní a druhé je aktivní, tudíž $\mu_1 = 0$ a $p_B = 600$. Dosazením do (8.4) získáme $p_A = 400$ a poté dopočítáme z (8.5), že $\mu_2 = 200$. Máme tedy jeden stacionární bod.

4. Obě omezení jsou aktivní, což nám dá $p_B = 600$ a poté z prvního omezení obdržíme $p_A = -200$, což nemůže nastat, protože p_A značí cenu výrobku.

Aby firma maximalizovala svůj příjem, měla by vyrábět $q_A = 400 - 2 \cdot 400 + 600 = 200$ jednotek produktu A a $q_B = 200 + 400 - 600 = 0$ jednotek produktu B, přičemž její celkový zisk bude 80 000 Kč.

[3] Příklad vychází z Vavrečková (2014).

4. Omezení ve tvaru nerovností s omezením na znaménko proměnných[4]

Spotřebitel má užitkovou funkci ve tvaru $u(x, y, z) = xyz$. Jeho rozpočtové omezení je dáno nerovnicí $p_1x + p_2y + p_3z \leq I$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, kde p_1, p_2, p_3 jsou nenulové ceny statků, x, y, z představují množství daných statků a $I > 0$ je rozpočet spotřebitele. Maximalizujte spotřebitelův užitek.

Řešení:
Vytvoříme Lagrangeovu funkci

$$L(x, y, z, \mu) = xyz - \mu(p_1x + p_2y + p_3z - I)$$

a zapíšeme Kuhnovy–Tuckerovy podmínky, tj.

$$L_x = yz - \mu p_1 \leq 0 \quad (= 0, \quad \text{pokud} \quad x > 0), \tag{8.9}$$

$$L_y = xz - \mu p_2 \leq 0 \quad (= 0, \quad \text{pokud} \quad y > 0), \tag{8.10}$$

$$L_z = xy - \mu p_3 \leq 0 \quad (= 0, \quad \text{pokud} \quad z > 0), \tag{8.11}$$

$$\mu(p_1x + p_2y + p_3z - I) = 0, \tag{8.12}$$

$$\mu \geq 0. \tag{8.13}$$

Budeme řešit dva případy:

1. Omezení je neaktivní, a tedy $\mu = 0$. Dosazením do (8.9), (8.10) a (8.11) získáme nerovnice $yz \leq 0$, $xz \leq 0$ a $xy \leq 0$. Protože jsou všechny proměnné nezáporné, může platit pouze $yz = xz = xy = 0$, což nás přivádí k množině řešení, kdy dvě proměnné budou rovny nule a třetí proměnná bude v intervalu $[0, I/p_i]$, pro $i = 1, 2, 3$. Všechny funkční hodnoty užitkové funkce v těchto bodech budou rovny nule. Dle Weierstrassovy věty lze dojít k závěru, že se jedná o vázaná lokální minima.

2. Omezeni je aktivní, takže platí $p_1x + p_2y + p_3z = I$ a $\mu > 0$. Protože $I > 0$, musí být aspoň jedna z proměnných kladná. Uvažujme, že $x > 0$. Potom z (8.9) získáme $yz = \mu p_1 > 0$, takže y, z musí být kladná. Takže z (8.9), (8.10) a (8.11) obdržíme

$$\frac{yz}{p_1} = \frac{xz}{p_2} = \frac{xy}{p_3} = \mu.$$

Z této rovnice vyjádříme $xp_1 = yp_2 = zp_3$, dosadíme do omezení a získáme stacionární bod $\mathbf{x}^* = (\frac{I}{3p_1}, \frac{I}{3p_2}, \frac{I}{3p_3})$ s $\mu = \frac{I^2}{9p_1p_2p_3}$.

Nakonec ověříme, zda se jedná o maximum. Druhé parciální derivace Lagrangeovy funkce jsou

$$L_{xx} = L_{yy} = L_{zz} = 0, \quad Lxy = z, \quad L_{xz} = y, \quad L_{yz} = x.$$

Parciální derivace prvního řádu rozpočtového omezení jsou $g_x = p_1$, $g_y = p_2$ a $g_z = p_3$. Potřebujeme spočítat poslední $n - e = 3 - 1 = 2$ vedoucí hlavní minory rozšířené Hessovy matice. Jelikož se jedná o matici 4×4, použijeme pro výpočet Laplaceův rozvoj, tedy

$$\begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & 0 & z & y \\ p_2 & z & 0 & x \\ p_3 & y & x & 0 \end{vmatrix} = -p_1 \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix} + p_2 \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & z & y \\ y & x & 0 \end{vmatrix} - p_3 \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{vmatrix} =$$
$$= -p_1(xzp_3 + xyp_2 - x^2p_1) + p_2(y^2p_2 - yzp_3 - xyp_1) - p_3(xzp_1 + yzp_2 - z^2p_3)$$

[4] Příklad vychází z Vavrečková (2014).

Po dosazení stacionárního bodu získáme hodnotu determinantu $-\frac{I^2}{3} < 0$, což odpovídá znaménku $(-1)^n = (-1)^3$. Nyní spočítáme determinant submatice 3×3, tj

$$\begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & 0 & z \\ p_2 & z & 0 \end{vmatrix} = \frac{2Ip_1p_2}{3p_3}.$$

Determinant je kladný, neboť $I, p_1, p_2, p_3 > 0$. Jedná se tedy o vázané lokální maximum a zároveň o řešení dané úlohy, neboť funkční hodnota užitkové funkce v tomto bodě je $f(\mathbf{x}^*) = \frac{I^3}{27p_1p_2p_3} > 0$.

Neřešené příklady

Matematické příklady

1. Nalezněte vázané extrémy funkce $f(x,y) = 4x + 12y + 1$ při daném omezení $g(x,y) = x^2 + x - y + \frac{1}{4} = 0$. Určete platnost kvalifikačního omezení.

2. Nalezněte vázané extrémy funkce $f(x,y) = 3xy$ při daném omezení $g(x,y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$. Určete platnost kvalifikačního omezení.

3. Nalezněte vázané extrémy funkce $f(x,y) = 24x - x^2 + 16y - 2y^2$ při daném omezení $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 44 = 0$. Určete platnost kvalifikačního omezení.

4. Nalezněte vázané extrémy funkce $f(x,y) = x + y$ při daném omezení $g(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 3 = 0$. Určete platnost kvalifikačního omezení.

5. Nalezněte vázané extrémy funkce $f(x,y) = 4x + 3y - 4$ na kružnici zadané rovnicí $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

6. Nalezněte vázané extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ při daném omezení $g(x,y) = x^2 - 2x + 4y + 2y^2 = 0$. Určete platnost kvalifikačního omezení.

7. Nalezněte vázané extrémy funkce $f(x,y,z) = xy^2z^3$ na $(\mathbb{R}^+)^3$ při daném omezení $g(x,y,z) = x + 2y + 3z - 6 = 0$. Určete platnost kvalifikačního omezení.

8. Nalezněte vázané extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 9z^2$ při daných omezeních $g_1(x,z) = x + z - 1 = 0$ a $g_2(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$. Určete platnost kvalifikačního omezení.

9. Nalezněte vázané extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ při daných omezeních $g_1(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ a $g_2(x,z) = x + z = 0$. Určete platnost kvalifikačního omezení.

10. Nalezněte maximum funkce $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ při daném omezení $g(x,y) = x + y = 100$. Určete platnost kvalifikačního omezení.

11. Nalezněte minimum funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ při daném omezení $g(x,y) = x + 2y = 4$. Určete platnost kvalifikačního omezení.

12. Nalezněte maximum funkce $f(x,y) = (x+2)(y+1)$ při daném omezení $g(x,y) = x + y = 21$. Určete platnost kvalifikačního omezení.

13. Nalezněte maximum funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ při daném omezení $g(x,y) = (x^2/25) + (y^2/9) = 1$. Určete platnost kvalifikačního omezení.

14. Nalezněte řešení úlohy $x^2 + y^2 \to \max$ za podmínek $2x + y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

15. Nalezněte řešení úlohy $-x^2 - y^2 \to$max za podmínky $x - 3y \leq -10$.

16. Nalezněte řešení úlohy $x^2 + y^2 + y - 1 \rightarrow$max za podmínky $x^2 + y^2 \leq 1$.

17. Nalezněte řešení úlohy $x^2 + 2y^2 - x \rightarrow$max za podmínky $x^2 + y^2 \leq 1$.

18. Nalezněte řešení úlohy $x^5 - y^3 \rightarrow$ max při omezení $x \leq 1$ a $x \leq y$.

19. Nalezněte řešení úlohy $\ln(x+1) + \ln(y+1) \rightarrow$ max za podmínek $x + 2y \leq \frac{5}{2}$ a $x + y \leq 2$.

20. Nalezněte řešení úlohy $xy \rightarrow$ max za podmínek $x + 2y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

21. Nalezněte řešení úlohy $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}y \rightarrow$ max za daných podmínek $x \leq 5$, $-x + y \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

22. Pomocí Lagrangeovy funkce a Kuhnových–Tuckerových podmínek najděte maximum funkce
$$f(x, y, z) = x - y + 2z - 2x^2 - 8y^2 - z^2 + 2xz - 2yz + 1,$$
na množině
$$M = \{[x, y, z] \in \mathrm{R}^3 \mid x + y + z = -1,\ x + y - z = -4\}$$

23. Pomocí Lagrangeovy funkce a Kuhnových–Tuckerových podmínek najděte maximum funkce
$$U(x, y) = 8x + 8y - x^2 - y^2 - 32$$
na množině
$$M = \{[x, y] \in \mathrm{R}^2 \mid x + y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}.$$
Načrtněte množinu M a vrstevnice funkce U. S pomocí tohoto obrázku ověřte správnost nalezeného řešení.

24. Pomocí Lagrangeovy funkce a Kuhnových–Tuckerových podmínek najděte minimum funkce
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$
na množině
$$M = \{[x, y, z] \in \mathrm{R}^3 \mid x + y - 3z = -7,\ x - y + z = 3\}$$

25. Určete všechny stacionární body funkce $f(x, y)$ na množině M (tzn. vyšetřete i hranice množiny M). Rozhodněte, zda jsou nalezené body také extrémy, a v případě kladné odpovědi určete typ extrému. Vyčíslete funkční hodnoty zjištěných extrému.
    (a) $f(x, y) = y^2 - 2y + e^{-x^2}$,
    $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$
    (b) $f(x, y) = y^2 + x^2 - xy + x + y$,
    $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -3 \leq y + x; 0 \geq x; 0 \geq y\}$

26. Řešte následující optimalizační problémy
    (a) $y = 3x^5 - 5x^3$ podléhající omezení $-a \leq x \leq a$ kde $a = \infty$, $a = \frac{5}{4}$
    (b) max $y = 10x_1 - 5x_2$ podléhající omezení $0 \leq x_1 \leq 20, 0 \leq x_2 \leq 20$
    (c) max $y = (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}}$ podléhající omezení $0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 10$
    (d) max $y = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 5$ podléhající omezení $0 \leq x_1 \leq 10, 2 \leq x_2 \leq 10$

27. Nalezněte stacionární body a rozhodněte, zda jsou globálním či lokálním extrémem funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$, která je omezena trojúhelníkovou množinou M s vrcholy $[0, 2]$, $[3, 0]$, $[0, -1]$.

Ekonomické příklady

1. Uvažujme spotřebitele s Cobb–Douglasovou užitkovou funkcí tvaru $U(x, y) = X^c Y^d$ s parametry c a d. Určete Marshallovy poptávky spotřebitele po statcích X a Y. Příklad řešte s využitím Lagrangeovy funkce.

2. Spotřebitel Adam má užitkovou funkci $U(x_S, x_C) = x_S x_C$, kde S označuje sušenky a C čokoládu. Cena jedné čokolády je 20 Kč a cena jedné sušenky je 5 Kč. Spotřebitel má kapesné 20 Kč na měsíc. Kolik sušenek a čokolád Adam spotřebuje, pokud bude maximalizovat užitek?

3. Spotřebitelka Bětka má užitkovou funkci $U(x_M, x_R) = x_M x_R$, kde x_M je počet tenisových míčků a x_R je počet raket. Cena míčku je 200 Kč a cena rakety je 400 Kč. Bětčin příjem činí 8 000 Kč. Cena rakety se sníží na 200 Kč.

   (a) Jak velká je její spotřeba míčků a raket před změnou?

   (b) Jak velká je její spotřeba míčků a raket po změně?

4. Preference spotřebitele Cyrila jsou reprezentovány užitkovou funkcí $U(x, y) = xy$, kde x je statek 1 a y je statek 2. Ceny jsou (p_x, p_y)=(2,2) a příjem je 48. Náhle se ceny změní na (p_x, p_y)=(2,8). Určete hodnoty původního a nového optimálního koše.

5. Spotřebitelka Dita hraje ráda ve volném čase golf a badminton. Její užitková funkce je $U(g, b) = gb$, kde g je počet her golfu a b je počet her badmintonu za týden. Na tyto sporty má k dispozici částku 4 000 Kč. Jedna hra golfu i jeden zápas v badmintonu stojí 500 Kč. Dita je však kromě peněz limitována také množstvím volného času. Oběma sportům může věnovat maximálně 12 hodin týdně. Jedna hra golfu trvá 3 hodiny, jeden zápas badmintonu 2 hodiny.

   (a) Určete kolik her golfu a badmintonu si Dita zahraje za týden?

   (b) Jak by se počet her změnil, pokud by Dita měla neomezené množství času na sportovní aktivity?

6. Spotřebitelka Eliška má kapesné 1200 Kč na měsíc. Spotřebitelka B je spořivá a nakupuje pouze čokoládu za 20 Kč za kus a zbytek peněz si odkládá jako úspory. Její užitková funkce je $U(x_C, x_U) = 64x_C - x_C^2 + x_U$, kde C značí čokoládu a U úspory. Kolik bude optimální ušetřená částka?

7. Spotřebitel Filip má následující užitkovou funkci: $U(x_H, x_Z) = x_H^2 + 2x_z$, kde H označuje hamburgery a Z zmrzlinu. Filip má kapesné 300 Kč za týden. Jeden hamburger ho stojí 50 Kč a jedna zmrzlina 25 Kč.

   (a) Určete jaká bude optimální spotřeba hamburgerů a zmrzliny.

   (b) Kapesné Filipa se nečekaně sníží na polovinu, určete jak se změní jeho spotřeba hamburgerů a zmrzliny.

8. Spotřebitel Gustav rád chodí do hospody. Má k dispozici 200 Kč na večer, které utrácí za pivo a utopence. Ceny statků jsou P_P = 20 Kč a P_U = 25 Kč. Gustav má užitkovou funkci $U(P, U) = -[(P - 6)^2 + (U - 2)^2]$, kde P je počet piv a U počet utopenců.

   (a) Kolik piva a utopenců spotřebuje za večer?

   (b) Jak se spotřeba změní, pokud se příjem zvýší na 250 Kč, a proč?

9. Student má k dispozici 60 hodin týdně na učení. Tento studijní čas chce vhodně alokovat mezi dva povinné předměty tak, aby maximalizoval svůj průměrný počet bodů. Problém můžeme zapsat jako $max \frac{g_1(t_1)+g_2(t_2)}{2}$ při omezení $60 - t_1 - t_2 = 0$, kde t_1, t_2 označuje časy věnované jednotlivým předmětům a g_1, g_2 označuje očekávané počty bodů jako funkce času. Platí, že $g_1 = 20 + 20\sqrt{t_1}$ a $g_2 = -80 + 3t_2$. Určete kolik času by měl student věnovat jednotlivým předmětům.

10. Firma má dva závody. První závod má nákladovou funkci $c_1(y_1) = 4y_1^2 + 10$ a druhý závod má nákladovou funkci $c_2(y_2) = 5y_2^2 + 20$. Pokud chce tato firma vyrobit 36 jednotek produkce s minimálními náklady, jak rozdělí produkci mezi jednotlivé závody?

11. Americká farmaceutická firma vynalezla nový lék proti malárii. Tento lék prodává do dvou afrických zemí. Relativně bohatá země A má roční poptávku po léku proti malárii $Q_A = 600\,000 - 50\,000\,P_A$ a relativně chudá země B má roční poptávku po tomto léku $Q_B = 400\,000 - 50\,000\,P_B$. Roční podíl fixních nákladů je 1 000 000 dolarů. Náklady na výrobu a dopravu jednoho balení jsou 4 dolary.

    Jaké budou ceny a množství léků pro zemi A a B za předpokladu, že firma je schopná cenové diskriminace? Jak se odpověď změní, jestliže firma není schopná vyrobit více než 200 000 balení ročně? Předpokládejte, že firma chce prodat všechno svoje zboží v těchto dvou zemích. Jaké budou ceny a množství v situaci, kdy se díky novému leteckému spojení sníží náklady na výrobu a dopravu do země B z hodnoty 4 na hodnotu 2? Předpokládejte, že produkce firmy je stále omezená na 200 000 kusů léku ročně.

12. Firma vyrábí právě jeden produkt. Ráda by vyprodukovala 30 jednotek tohoto produktu, a to s co nejnižšími náklady. S využitím K jednotek kapitálu a L jednotek práce dokáže vyrobit $\sqrt{K} + L$ jednotek produktu. Cena kapitálu je 1 dolar, cena práce je 20 dolarů.

    (a) Najděte optimální kombinaci kapitálu K a práce L.

    (b) Vypočítejte jaký je náklad produkce dodatečné jednotky.

13. Copycentrum vyrábí kopie s denní produkční funkcí $f(L, K) = 500\sqrt{2LK}$, kde L je počet hodin práce a K je počet hodin kopírek. Náklady na hodinu práce jsou 200 Kč a náklady na hodinu kopírky jsou 100 Kč. Pokud chce firma minimalizovat náklady, kolik hodin kopírky bude připadat na každou hodinu práce? Kolik hodin práce a kopírky bude potřeba na výrobu y kopií?

14. Roční produkční funkce firmy je ve tvaru $F(K, L, P) = 20K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}P^{\frac{1}{4}}$, kde K, L, P označují jednotky vstupů jednotlivých výrobních faktorů. Ceny za jednotky vstupu jsou $P_K = 500, P_L = 1000, P_P = 300$. Jakou kombinaci množství jednotlivých vstupů má firma zakoupit, jestliže maximalizuje produkci a její rozpočet je 800 000?

15. Intertemporální (mezičasová) optimalizace domácností. Uvažujte domácnost, která žije dvě období a její užitková funkce je
$$U(c_1, c_2) = \ln(c_1) + \chi \ln(c_2)$$
    Její důchod v těchto dvou obdobích je konstanta o velikostech y_1 a y_2, navíc v prvním období získá dědictví b. Předpokládejme, že reálná úroková míra je dána exogenně a je konstantní o velikosti R.

    (a) Zapište a zakreslete rozpočtové omezení.

    (b) Určete (a do předchozího obrázku vyznačte) optimální spotřebu v obou obdobích v případě, že domácnost nemá možnost půjčovat si ani spořit.

    (c) Vyřešte optimalizační problém domácnosti, která maximalizuje užitek. Nalezněte optimální kombinaci spotřeby v obou obdobích v případě, že domácnost má možnost půjčovat si či spořit.

    (d) Jaká by byla spotřeba maximalizující užitek v obou obdobích v případě, že $y_1 = 20$, $y_2 = 30$, $b = 30$, $R = 2$ a $\chi = 2$? Ověřte, že tato spotřeba splňuje rozpočtové omezení.

16. Intertemporální (mezičasová) optimalizace domácností. Uvažujte domácnost, která žije dvě období a její užitková funkce je

    (a)
$$U(c_1, c_2) = c_1^a c_2^b$$

(b)
$$U(c_1, c_2) = a \ln c_1 + b \ln c_2$$

(c)
$$U(c_1, c_2) = \frac{(c_1)}{\gamma} + \beta \frac{(c_2)}{1-\gamma}$$

(d)
$$U(c_1, c_2) = \psi + \frac{1}{\alpha} e^{(-\alpha c_1)} + \frac{\beta}{\alpha} e^{(-\alpha c_2)}.$$

Pro oba případy nalezněte Eulerovu rovnici.

17. Firma vyrábí a prodává dvě komodity. Za prodej x tun jedné komodity dostane firma cenu $p = 96 - 4x$. Za prodej y tun druhé komodity dostane firma cenu $q = 84 - 2y$. Funkce nákladů na výrobu a prodej x tun první komodity a y tun druhé komodity je $C(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2$.
    (a) Zapiště ziskovou funkci firmy.
    (b) Vypočítejte optimální množství, které maximalizuje zisk firmy.
    (c) Produkce firmy způsobuje znečištění, vláda proto vydá omezení pouze na 11 tun celkové produkce komodit. Vypočítejte, jak se změní optimální množství firmy a jak se změní její zisk.

18. Intertemporální (mezičasová) optimalizace domácností. Uvažujte domácnost, která žije tři období a její užitková funkce je
$$U(c_1, c_2, c_3) = \ln(c_1) + \chi \ln(c_2) + \xi \ln(c_3)$$
    Její důchod v těchto třech obdobích je konstanta o velikostech y_1, y_2 a y_3, navíc v prvním období získá dědictví b. Předpokládejme, že reálná úroková míra je dána exogenně a je konstantní o velikosti R.
    (a) Zapište a zakreslete rozpočtové omezení.
    (b) Určete optimální spotřebu v obou obdobích v případě, že domácnost nemá možnost půjčovat si ani spořit.
    (c) Vyřešte optimalizační problém domácnosti, která maximalizuje užitek. Nalezněte optimální kombinaci spotřeby ve všech obdobích v případě, že domácnost má možnost půjčovat si či spořit.
    (d) Jaká by byla spotřeba maximalizující užitek v obou obdobích v případě, že $y_1 = 10$, $y_2 = 20$, $y_3 = 40$, $b = 60$, $R = 1$, $\chi = 2$ a $\xi = 3$? Ověřte, že tato spotřeba splňuje rozpočtové omezení.

19. Firma má k dispozici L jednotek práce a produkuje dva výrobky, které prodává za pevné ceny a a b za jednotku. K produkci x a y jednotek výrobku je potřeba αx^2 a βy^2 jednotek práce. Maximalizujte výnos firmy, který je dán funkcí $f(x, y) = ax + by$ za podmínky $g(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 \leq L$, kde a, b, α a β jsou kladné konstanty.

20. Předpokládejme, že spotřebitel kupuje statky A a B, jejichž množství označme x a y. Jeho užitková funkce je dána ve tvaru $u(x, y) = \ln x + \ln y$. Ceny statků A a B jsou 10 Kč a 5 Kč. Spotřebitel může za tyto statky utratit maximálně 350 Kč. Dále předpokládejme, že spotřeba jedné jednotky statku A trvá 0,1 hodin a spotřeba jedné jednotky statku B zabere 0,2 hodin. Spotřebitel má maximálně 8 hodin na spotřebu veškerého množství obou statků. Jaké množství statku A a B by měl spotřebitel kupovat, aby maximalizoval svůj užitek?

21. Firma vyrábí dva typy produktů – typ A a typ B. Jestliže si účtuje cenu p_A za jednotku produktu A a cenu p_b za jednotku produktu B, potom prodá q_A jednotek produktu A a q_B jednotek produktu B, kde $q_A = 400 - 2p_A + p_B$ a $q_B = 200 + p_A - p_B$. K výrobě jedné jednotky produktu A potřebuje firma 2 hodiny práce a 1 jednotku materiálu. Pro výrobu jedné jednotky produktu B potřebuje 3

hodiny práce a 2 jednotky materiálu. Firma má k dispozici maximálně 1 000 hodin práce a 200 jednotek materiálu. Maximalizujte celkový příjem firmy, který je dán vztahem $400p_A + 200p_B - 2p_A^2 - p_B^2 + 2p_Ap_B$.

22. Spotřebitel má užitkovou funkci ve tvaru $u(x, y, z) = xyz$. Jeho rozpočtové omezení je dáno nerovnicí $p_1x + p_2y + p_3z \leq I$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, kde p_1, p_2, p_3 jsou nenulové ceny statků, x, y, z představují množství daných statků a $I > 0$ je rozpočet spotřebitele. Maximalizujte spotřebitelův užitek.

23. Spotřebitel se rozhoduje o maximalizaci užitku ze spotřeby ve dvou po sobě jdoucích obdobích. Jeho užitková funkce nabývá tvaru $u(c_1, c_2) = -[(c_1 - 4)^2 + (c_2 - 4)^2]$. Přičemž víme, že je výše spotřeby v obou obdobích nezáporná. Spotřebu v obou obdobích nakupuje za jeden milión korun za jednotku spotřeby. Navíc o tomto spotřebiteli víme, že v prvním období není příjemcem žádného důchodu a ve druhém období ví, že obdrží pouze dědictví ve výši 4 milionů. Spotřebitel má přístup na úvěrový trh (banky si neúčtují žádný úrok) a smí si peníze v prvním období (maximálně do výše jeho dědictví) vypůjčit, nicméně výše úvěru je omezena nezáporným úvěrovým omezením ve výši $b \geq 0$. Nalezněte optimální spotřebu v případě, že (i) úvěrové omezení není svazující (ii) úvěrové omezení je svazující.

24. Uvažujte model mezičasové volby. Nyní předpokládejme, že není jedna úroková míra r, ale spotřebitel může spořit za úrokovou míru r_s a půjčovat si za úrokovou míru r_b, přičemž platí $r_b > r_s$.

    (a) Napište spotřebitelovo rozpočtové omezení pro případ, že i) spotřebovává v prvním období méně než jeho důchod ii) spotřebovává v prvním období více než jeho důchod

    (b) Nakreslete obě rozpočtová omezení a ukažte oblast, která je spotřebitelovi dostupná.

    (c) Přidejte do grafu indiferenční křivky. Ukažte tři možné situace: spotřebitel spoří, spotřebitel si půjčuje a spotřebitel ani nespoří ani si nepůjčuje.

    (d) Co určuje spotřebu v prvním období pro tři výše uvedené případy?

25. Intertemporální (mezičasová) optimalizace domácností. Uvažujte kouzelnickou domácnost Nicolase Flamela, která žije dvě období a její užitková funkce je

$$\ln(c_1) + \ln(c_2)$$

    Její důchod v těchto dvou obdobích je $y_1 = 10$ a $y_2 = 30$. Předpokládejme, že úroková míra je dána exogenně a je konstatní a rovna 0.

    (a) Napište mezičasové rozpočtové omezení

    (b) Vypočítejte optimální spotřebu (c_1, c_2)

    (c) Předpokládejte, že domácnost si nemůže půjčovat a ani nemůže spořit. Jaká bude optimální spotřeba nyní?

    (d) Uvažujme, že mají Flamelovi děti, které začnou spotřebovávat až po smrti rodičů. Každý žije dvě období. Děti mají užitkovou funkci

$$\ln(c_3) + \ln(c_4)$$

    a rodiče mají užitkovou funkci

$$\ln(c_1) + \ln(c_2) + v(b)$$

    kde b je děditctví (bequest) zanechané dětem a $v(b)$ je maximální užitek dětí, které mohou získat při daném dědictví b. Důchod rodičů je $(y_1, y_2) = (10; 40)$ a důchod dětí je $(y_3, y_4) = (20; 10)$

Vyřeště maximalizační problém dětí, abyste získaly $v(b)$, tj vyřešte

$$v(b) = \max\{\ln(c_3) + \ln(c_4)\}$$

vzhledem k

$$c_3 + c_4 = y_3 + y_4 + b.$$

(e) Použijte svou odpověď z předchozí otázky k vyřešení maximalizačního problému rodičů. (Dědictví může být i záporné).

(f) Nyní uvažujte, že vláda vybere daně v období 2 ve výši 30 a rozdělí je paušálně v období 3. Jaká je optimální výše dědictví a výše spotřeby nyní?

(g) Opět předpokládáme možnost půjčování. Nyní předpokládejme, že Nicolas vymyslí lektvar dlouhověkosti, což jeho domácnosti umožní žít o dvě období déle (děti neuvažujeme). Důchod v těchto dvou obdobích je $y_1 = 10$, $y_2 = 40$, $y_3 = 20$ a $y_4 = 10$. Jak budou nyní vypadat odpovědi na (a)-(c).

(h) Jak by se změnilo rozhodování Nicolasovy domácnosti, pokud by vynalezl kámen mudrců. Uvažujte, že Nicolas až pozdě zjistí, že užití kamene mudrců způsobuje impotenci.

26. Optimální alokace spotřebních výdajů. Nalezněte rozhodování reprezentativní domácnosti o tom, jak optimálně alokovat své spotřební výdaje mezi jednotlivé statky $C_t(i)$, kde $i = 1, \ldots, n$. Výstupem této optimalizace bude množina poptávkových rovnic pro jednotlivé statky $C_t(i)$.

    Konkrétně tedy budeme zkoumat problém, kdy reprezentativní domácnost maximalizuje spotřebu $C_t \equiv \left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\epsilon}} di\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}}$ pro jakoukoliv úroveň výdajů $X_t \equiv \int_0^1 P_t(i)C_t(i)di$. Lagrangián pro tuto optimalizaci má podobu

$$\mathcal{L} = \left(\int_0^1 C_t(i)^{1-\frac{1}{\epsilon}} di\right)^{\frac{\epsilon}{\epsilon-1}} - \lambda_t \left(\int_0^1 P_t(i)C_t(i)di - X_t\right)$$

    Odvoďte poptávku domácnosti po jednotlivých spotřebních statcích.

27. Spotřebitel má užitkovou funkci $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Navíc čelí rozpočtovému omezení z důchodu $2x_1 + 3x_2 \leq 100$ a časovému rozpočtovému omezení $x_1 + 4x_2 \leq 80$. Nalezněte optimální spotřebu tak, aby byl spotřebitelův užitek maximální.

28. Spotřebitel (a zároveň pracovník) má užitkovou funkci $U(x_1, x_2) = x_1 x_2$, kde x_1 je jeho příjem a x_2 je volný čas. Tento pracovník čelí rozpočtovému omezení ve tvaru $x_1 = m + w(T - x_2)$, kde m je daný příjem získaný jiným způsobem než prací, w je daná mzda a T je celkový čas, který dělí mezi práci $T - x_2$ a odpočinek x_2. Také zde máme maximální počet hodin H, které je ochoten pracovat, přičemž platí $H \leq T$. Formulujte a následně vyřešte problém optimální volby pracovníka mezi příjmem a volným časem vzhledem k daným omezením.