Finanční matematika

Pravidelné anuity - budoucí a současná hodnota, pravidelná platba

Silvie Zlatošová

2024

Obsah

Obsah

- Do kategorie pravidelných anuit můžeme zařadit splátky úvěrů (např. hypoték) a pravidelné spoření (spořící účty, životní pojištění atd.).
- **Anuitou** budeme rozumět posloupnost plateb (obvykle stejně vysokých), které se uskutečňují ve stejných časových intervalech.
- **Platební intervaly** jsou vázány na složenou úrokovou sazbu. Platební a úrokové období se obvykle shodují.
- Můžeme si to představit tak, že např. u měsíčních splátek hypotéky budeme uvažovat měsíční úrokovací období.

Klasifikace anuit

První typ **dělení probíhá na základě období**:

- **Anuity jisté** - začátek a konec plateb je nastaven k přesnému okamžiku. Zde patří např. hypotéky.
- **Podmíněné anuity** - začátek nebo konec je podmíněn nějakou událostí. Zde patří např. penzijní fondy, doživotní renty, životní pojištění.
- **Věčné anuity** (perpetuity) - zde je přesně určený okamžik počáteční platby, ale počet plateb je nekonečný. Zde patří např. úrokový příjem z jistiny, aniž bychom snižovali hodnotu jistiny.

Klasifikace anuit

Druhý typ dělení záleží na **umístění platby v rámci období**:

- **Anuity polhůtní** - k platbě dochází vždy na konci období.
- **Anuity předlhůtní** - k platbě dochází na začátku období.

Jedná se v podstatě o stejnou posloupnost plateb, ale tyto platby jsou oceněny v různých časových okamžicích.

Třetí typ dělení záleží na **nastavení platebního a úrokovacího období**:

- **Jednoduchá anuita** - provádění plateb a připisování úroků má stejnou frekvenci.
- **Obecná anuita** - Platební a úrokovací období nejsou shodné. K připisování úroků dochází buď častěji nebo méně často než k provádění plateb.

- Kromě pravidelných plateb je potřeba u anuit stanovit také jejich současnou hodnotu (to má smysl v případě úvěrů nebo důchodů) nebo budoucí hodnotu (to má smysl v případě spoření).
- **Současná hodnota** se vztahuje k počátku. Např. v případě úvěrů dlužník obdrží tuto částku peněz, kterou pak postupně splácí.
- **Budoucí hodnota** je umístěna do období konce anuitních plateb. Střadatel pravidelnými platbami a připisovanými úroky postupně vytváří potřebný obnos peněz.

Obsah

Značení

- i označuje úrokovou míru pro jedno úrokovací období, tedy $i = \frac{i_m}{m}$;
- n značí počet plateb;
- R označuje výši jedné platby;
- S_n značí budoucí hodnotu součtu všech plateb v den poslední platby.

Odvození vzorce pro budoucí hodnotu anuit S_n

Pro geometrickou řadu platí:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a\,(1-q^n)}{1-q}.$$

Podobně pro budoucí hodnotu anuit můžeme psát

$$S_n = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-1},$$

kde první člen řady je R a kvocient geometrické řady je $(1+i)$. Tedy

$$S_n = \frac{R\,[1-(1+i)^n]}{1-(1+i)} = \frac{R\,[1-(1+i)^n]}{-i} = \frac{R\,[(1+i)^n - 1]}{i}$$

Tedy pro budoucí hodnotu sumy n anuit platí

$$S_n = \frac{R\,[(1+i)^n - 1]}{i}$$

- Pozor na počet úložek!
- Např. pokud ukládáme měsíčně a ptáme se kolik bude úložek za rok, pak je to 12.
- Ale pokud ukládáme vždy 1. v měsíci a víme, že první úložku uděláme 1. 1. 2024 a poslední 1. 1. 2025, pak počet úložek je 13!
- Jedná se o tzv. **princip plotového sloupku**, kdy počet období mezi platbami je 12, ale proběhne celkem 13 plateb.

Příklad

Muž si ukládá 750 Kč měsíčně na svůj účet. Ten je úročen sazbou 7,5 % p.a. Připisování úroků probíhá každý měsíc. Kolik muž naspoří za 5 let?

Příklad

Otec ukládá své dceři na studia 1 250 Kč každého čtvrt roku. První úložku provedl 15. března 2006 a poslední 15. září 2024. Kolik se na účtu naspořilo, pokud účet úročí úrokovou mírou 6 % p.a. čtyřikrát do roka?

Obsah

- **Současná hodnota anuit** je suma peněz, která je ekvivalentní posloupnosti plateb, které následují.
- Současnou hodnotu polhůtních anuit počítáme jedno období před 1. výplatou (splátkou).
- Můžeme si zde představit úvěr a jeho splácení.
- Vypůjčený obnos je současná hodnota a splátky pak tvoří pravidelné anuity.
- Současnou hodnotu anuit si označíme jako A_n.
- Jedná se o sumu současných hodnot všech plateb.

Odvození vzorce pro současnou hodnotu anuit A_n

Vyjdeme z budoucí hodnoty anuit S_n a posuneme ji do současnosti:

$$
\begin{aligned}
A_n &= S_n(1+i)^{-n} \\
A_n &= \frac{R\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}(1+i)^{-n} \\
A_n &= \frac{R\left[(1+i)^n(1+i)^{-n} - 1(1+i)^{-n}\right]}{i}
\end{aligned}
$$

Tedy

$$A_n = \frac{R\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}$$

Příklad

Najděte výši investice, kterou bylo nutné uskutečnit 1. 12. 2004, aby každý měsíc od 1. 1. 2005 po dobu 15 let vynášela 1 200 Kč. Průměrný zisk z této investice je 9,5 % p.a., k úročení dochází každý měsíc.

Příklad

Prodejce aut inzeruje vůz na splátky. Při nákupu zaplatí zákazník 200 000 Kč hned a pak každý měsíc zaplatí splátku 40 000 Kč po dobu 2 let. Kolik by automobil stál v hotovosti dnes? Uvažujte úrokovou míru 10,5 % a měsíční úročení.

Obsah

- Obvykle známe současnou hodnotu půjčky nebo víme kolik peněz potřebujeme naspořit.
- Otázkou zůstává, jak vysoká musí být splátka případně úložka, aby bylo dosaženo požadovaného cíle.
- Pokud známe S_n pak R vyjádříme jako

$$R = \frac{S_n}{\frac{[(1+i)^n-1]}{i}} = \frac{S_n i}{(1+i)^n - 1}.$$

- Pokud známe A_n pak R vyjádříme jako

$$R = \frac{A_n}{\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}} = \frac{A_n i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Příklad

Uvažujme obnos ve výši 1 500 000 Kč, který jsme investovali s úrokovou mírou 8 % p.a. a úročení probíhá 12 krát za rok. Z této investice požadujeme měsíční rentu po dobu 15 let. O jak vysokou rentu se bude jednat?

Příklad

Lucie si chtěla na svém zaměstnaneckém účtu měsíčními úložkami naspořit 100 000 Kč. Úroková míra byla ve výši 6,5 % p.a. a úroky se připisovaly každý měsíc. Jak vysoká byla úložka, začala-li spořit 30. 9. 2018 a poslední úložku provedla 30. 6. 2022

Obsah

- Jestliže investujeme peníze, abychom si zajistili pravidelný příjem v budoucnosti, pak nás zajímá, kolik pravidelných plateb dostaneme.
- Toto je důležité např. u důchodových účtů, výplaty pojistného plnění, atd.
- V případě, že známe současnou hodnotu peněz a výši pravidelných plateb, jsme schopni dopočítat počet plateb a určit výši poslední (nižší) platby.
- Pokud vypočtené n nebude celé číslo, pak poslední platba bude nižší.
- Přesnou výši poslední platby určíme tak, že vypočteme budoucí hodnotu investované sumy k datu poslední celé výplaty (úročíme po n období) a odečteme od ní budoucí hodnotu sumy celých plateb. Pak výsledek úročíme ještě jedno období, abychom dostali výši poslední nižší výplaty v období $n + 1$.

Příklad

Uvažujme pojistné plnění z pojištění pro případ smrti ve výši 2 500 000 Kč. Vdova si chce zajistit pravidelný příjem ve výši 30 000 Kč měsíčně. Peníze mohou být investovány při úrokové míře 10,75 % p.a. a měsíčním úročení. Kolik pravidelných plateb vdova dostane a jaká bude výše poslední platby?

- Pokud známe budoucí hodnotu naspořených peněz a výši jedné úložky, pak při určení počtu úložek postupujeme podobně.
- Při určení poslední (nižší) platby postupujeme tak, že od výše potřebné naspořené sumy odečteme budoucí hodnotu celých plateb úročenou ještě jedno období.

Příklad

Potřebujeme naspořit 55 000 Kč a můžeme ukládat 6 000 Kč za čtvrt roku. Banka úročí mírou 7 % p.a. čtyři krát do roka. Kolik úložek musíme udělat, aby byla naspořena potřebná částka? Jaká bude výše poslední úložky?

Obsah

- Jako příklad předlhůtní anuity si můžeme uvést platbu pojistného (poprvé musí být zaplaceno před uzavřením smlouvy) nebo platbu nájemného (majitelé obvykle vyžadují platu předem).
- **Současnou hodnotu předlhůtních anuitních plateb** potřebujeme znát např. v případě změny frekvence plateb pojistného z měsíčních na roční nebo čtvrtletní.

- Pro současnou hodnotu předlhůtních anuit platí

$$A_n^{\text{před}} = A_n(1+i).$$

- Při výpočtu **budoucí hodnoty předlhůtních anuit** využijeme vztah

$$S_n^{\text{před}} = S_n(1+i).$$

Příklad

Pro životní pojištění najděte roční pojistné, které je ekvivalentní měsíční platbě pojistného ve výši 380 Kč, jestliže pojišťovna účtuje za měsíční platby úrok 7 % p.a. a úročí měsíčně. Kolik pojištěný ušetří na úrocích, bude-li platby provádět ročně?

Příklad

Uvažujte úvěr ve výši 125 000 Kč. Tento úvěr se má splácet po dobu deseti let měsíčními splátkami ve výši 1 200 Kč a poslední splátkou pak doplatíte zbytek dluhu. Banka úročí mírou 8,5 % p.a. K úročení dochází každý měsíc. Jak vysoká bude poslední splátka?

Obsah

- **Anuity s odloženou výplatou** jsou typem anuit, pro které je jejich současná hodnota posunuta několik období před první výplatu.
- Můžeme zde zařadit např. důchodová spoření, kdy nejprve provedeme investici a až za několik let očekáváme výplatu důchodu.
- Označíme li počet období do první výplaty jako p, pak současnou hodnotu anuit s odloženou výplatou vypočteme jako

$$A_n^{odl} = A_n v^p = \frac{R\left[1-(1+i)^{-n}\right]}{i}\frac{1}{(1+i)^p}$$

Příklad

Určete sumu, která musí být investována 18. 10. 2018 při 6 % p.a. úroku a měsíčním úročení, jestliže chceme od 18. 8. 2024 dostávat po dobu 5 let každý měsíc 500 Kč.

Obsah

- **Anuitou s odloženou budoucí hodnotou** budeme chápat anuitu, u které je její budoucí hodnota odložena několik period po poslední splátce.
- Počet period odkladu výběru peněz si označme jako p.
- Můžeme si zde představit např. spoření, u kterého poté, co ukončíme ukládání pravidelných částek, ještě p období necháme peníze ležet v bance a teprve po uplynutí doby p si peníze vybereme.
- Odloženou budoucí hodnotu spočítáme jako

$$S_n^{odl} = S_n(1+i)^p.$$

Příklad

Otec se rozhodl svým dvojčatům spořit na studia. První úložku učinil v den jejich 1. narozenin a poslední úložku v den jejich 12. narozenin. Otec ukládá 3 500 Kč měsíčně. Kolik peněz budou mít dvojčata na účtu v den jejich 18. narozenin, budeme-li uvažovat úrokovou míru 7 % p.a. a měsíční úročení?