Finanční matematika

Složené úročení

Silvie Zlatošová

2024

Obsah

Obsah

Úvod

- **Složené úročení** je založeno na principu **úročení úroků** z minulých úrokovacích období.
- Hodnota peněz úročených principem složeného úročení roste rychleji než tomu je u jednoduchého úročení.
- Nárůst v případě jednoduchého úročení je dán výší jistiny. Ale v případě složeného úročení v dalších obdobích do jistiny zahrnujeme i úroky.
- Nárůst u jednoduchého úročení vyjádříme lineární funkcí, ale u složeného úročení se jedná o **exponenciální** funkci.

Základní značení

- **Úrokovací období (konverzní období)** udává délku období mezi dvěma po sobě jdoucími připisováními úroků.
- **Počet konverzí** za rok označíme jako m.
- K nalezení míry pro úrokovací období je nutné vydělit nominální míru i_m (roční procentuální míru) počtem konverzí za rok.
- Např. víme-li, že roční úroková míra je 8 % a dochází ke čtvrtletnímu připisování úroků, pak úroková míra pro dané konverzní období je 2 %.
- V případě, že úrokovací období není upřesněno, budeme uvažovat roční připisování úroků.

Základní značení

- Jako n označíme celkový počet úrokovacích období. Platí $n = mt$, kde t značí délku období v letech.
- P značí současnou hodnotu.
- S je budoucí hodnota.
- i značí úrokovou sazbu na dané úrokovací období. Platí tedy $i = \frac{i_m}{m}$

Budoucí hodnota S při složeném úročení

Uvažujme princip složeného úročení. ÚO značí úrokovací období. Odvodíme si vzorec pro výpočet budoucí hodnoty S:

ÚO	**Připočtení úroků**	**S**
1	$S = P + iP$	$S = P(1+i)$
2	$S = P(1+i) + iP(1+i) = P(1+i)(1+i)$	$S = P(1+i)^2$
3	$S = P(1+i)^2 + iP(1+i)^2 = P(1+i)^2(1+i)$	$S = P(1+i)^3$
	$\vdots$	
n	$S = P(1+i)^{n-1} + iP(1+i)^{n-1}$	
	$=P(1+i)^{n-1}(1+i)$	$S = P(1+i)^n$

Tedy pro budoucí hodnotu S můžeme psát:

$$S = P(1+i)^n.$$

Propojení s geometrickou řadou

- Úrokovací faktor složeného úročení je tedy $(1+i)^n$, nazýváme ho **akumulační faktor** (akumulační funkce).
- Jedná se o prostředek posunu hodnoty po časové ose.
- Připisování složeného úroku můžeme vyjádřit pomocí **geometrické řady**.
- Prvním členem řady je pak jistina a kvocient řady vyjádříme jako $(1+i)$. Tedy

$$a_1 = P \qquad q = (1+i).$$

- Pak pro $(n+1)$. člen řady platí

$$a_{n+1} = a_1 q^n = P(1+i)^n$$

Příklad

Najděte hodnotu částky 4 500 Kč investované na 8 let a 6 měsíců jestliže uvažujeme úrokovou míru 6 % p.a. a připisování úroků 4 krát za rok.

Příklad

Investor 1. 9. 2018 vložil 9 500 \$ do fondu, který vynáší 7,5 % p.a. Úroky se připisují 4 krát do roka. Jaká je hodnota fondu 15. 7. 2022? Pro necelé poslední období využijte jednoduché úročení a bankovní pravidlo.

Obsah

- **Současná hodnota** je suma, která se zvýší prostřednictvím složeného úročení na známou budoucí hodnotu k zadanému datu v budoucnosti.
- Výše úroku, který získáme za investiční období metodou složeného úročení, se nazývá **složený úrok**.
- Pokud se na situaci podíváme obrácenou perspektivou, pak rozdíl mezi budoucí hodnotou a současnou hodnotou nazýváme **diskont**.
- Diskont je tedy srážka, kterou musíme počítat, pokud se pohybujeme po časové ose zpět.

Odvození vzorce pro P

Můžeme tedy odvodit:

$$\begin{aligned} S &= P(1+i)^n \\ \frac{S}{(1+i)^n} &= \frac{P(1+i)^n}{(1+i)^n} \\ \frac{S}{(1+i)^n} &= P \end{aligned}$$

Pro P tedy při složeném úročení platí

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S(1+i)^{-n} = Sv^n,$$

kde $v^n = (1+i)^{-n}$ nazýváme **diskontní faktor**. Jedná se o současnou hodnotu budoucí částky ve výši 1.

Příklad

Kolik dnes musíme investovat, pokud chceme na konci investičního období za 42 měsíců obdržet 22 650 Kč? Uvažujme úrokovou míru 7 % p.a. a čtvrtletní připisování úroků.

Příklad

Dlužní úpis s hodnotou 24 890 Kč v době splatnosti 1. 3. 2022 byl prodán 6. 10. 2016 s úrokem 8 % p.a., který se připisuje 12 krát do roka. Najděte prodejní cenu a výši diskontu.

Obsah

- U složeného diskontu dochází k diskontování diskontu v dalších obdobích.
- Označíme-li d roční diskontní míru, pak podobně jako u složeného úročení můžeme psát pro současnou hodnotu

$$P = S(1-d)^n.$$

A pro budoucí hodnotu platí

$$S = \frac{P}{(1-d)^n}.$$

Platí následující vztahy mezi ekvivalentní diskontní a úrokovou sazbou:

$$(1) d = iv \qquad (2) v = 1-d \qquad (3) i-d = id,$$

kde $v = \frac{1}{1+i}$. Z vlastnosti (3) plyne $\boldsymbol{D(1+i)^n = I}$.

Vyjádření ekvivalentní míry

Budeme-li předpokládat, že úroková míra je ekvivalentní diskontní sazbě, pak pro ně platí rovnost

$$\begin{aligned} (1+i)^t &= \left(\frac{1}{1-d}\right)^t \\ 1+i &= \frac{1}{1-d} \\ i &= \frac{d}{1-d}. \end{aligned}$$

Je možné vyjádřit také d

$$d = \frac{i}{1+i}.$$

Příklad

Porovnejte půjčku 5 000 Kč na 4 roky úročenou principem složeného úročení s úrokovou mírou 7 % p.a. a ročním připisováním úroků s půjčkou 5 000 Kč na 4 roky při ekvivalentní složené diskontní míře. Ověřte platnost $D(1+i)^n = I$.

Obsah

Obsah

- V případě investičních rozhodnutí je často nutné porovnat dvě různé úrokové míry s odlišnou dobou konverze.
- Například úroková míra 8 % p.a. (i_m) s měsíčním připisováním úroků a úroková míra 8,25 % p.a.(i) připisovaná ročně.
- Pokud obě míry vyjádříme na nominální bázi (roční připisování úroků), pak je možné je porovnat.
- Takové vyjádření nazýváme **roční efektivní mírou**.
- Budeme předpokládat, že nominální míra i_m připisovaná m-krát do roka přináší stejné zhodnocení 1 Kč za jeden rok jako úroková míra i_e s ročním připisováním.

Tedy můžeme psát:

složené úročení s mírou i_e **připisování 1 krát za rok**

$$S = (1 + i_e)^1$$

a

složené úročení s mírou i_m **připisování m-krát do roka**

$$S = \left[1 + \frac{i_m}{m}\right]^m$$

$$\begin{aligned} (1 + i_e)^1 &= \left[1 + \frac{i_m}{m}\right]^m \\ i_e &= \left[1 + \frac{i_m}{m}\right]^m - 1. \end{aligned}$$

Tedy pro **roční efektivní míru platí**

$$i_e = \left[1 + \frac{i_m}{m}\right]^m - 1$$

Je možné také vyjádřit nominální úrokovou míru i_m

$$
\begin{aligned}
(1+i_e)^1 &= \left[1+\frac{i_m}{m}\right]^m \\
\sqrt[m]{1+i_e} &= 1+\frac{i_m}{m} \\
\frac{i_m}{m} &= \sqrt[m]{1+i_e}-1 \\
i_m &= m\left[\sqrt[m]{1+i_e}-1\right].
\end{aligned}
$$

Příklad

Najděte roční efektivní míru, pokud uvažujeme úrokovou míru 8 % a připisování úroků 4krát, 12 krát a 365 krát do roka.

Příklad

Určete roční nominální úrokovou míru, pokud uvažujeme čtvrtletní připisování úroků a ekvivalentní roční efektivní míra je 10 %.

Obsah

- Podobně jako u úrokové míry můžeme u diskontování určit **efektivní diskontní sazbu**.
- **Nominální diskontní sazba** d_m s připisováním m krát za rok znamená, že za každé konverzní období zaplatíme diskontní sazbu $\frac{d_m}{m}$.
- Budeme předpokládat, že současná hodnota 1 Kč splatná za 1 rok s použitím nominální sazby je ekvivalentní 1 Kč splatné za rok při použití efektivní sazby.

Tedy můžeme psát:

sl. diskontování se sazbou d_e a připisováním 1 krát za rok

sl. diskontování s mírou d_m a připisováním m-krát do roka

$$P = (1 - d_e) \quad \text{a} \quad P = \left[1 - \frac{d_m}{m}\right]^m$$

$$\begin{aligned} (1 - d_e) &= \left[1 - \frac{d_m}{m}\right]^m \\ d_e &= 1 - \left[1 - \frac{d_m}{m}\right]^m . \end{aligned}$$

Tedy pro **roční efektivní diskontní sazbu platí**

$$d_e = 1 - \left[1 - \frac{d_m}{m}\right]^m$$

Je možné také vyjádřit nominální diskontní sazbu d_m

$$\begin{aligned}
(1-d_e) &= \left[1-\frac{d_m}{m}\right]^m \\
\sqrt[m]{(1-d_e)} &= 1-\frac{d_m}{m} \\
\frac{d_m}{m} &= 1-\sqrt[m]{1-d_e} \\
d_m &= m\left[1-\sqrt[m]{1-d_e}\right].
\end{aligned}$$

- Vyjádřeme **vztah mezi ekvivalentními nominálními hodnotami diskontní a úrokové sazby**, pokud budeme pro každou uvažovat **rozdílné konverzní období.**
- Z předchozího víme, že $v = (1-d)$ tedy $v^{-1} = (1-d)^{-1}$. A také $v = (1+i)^{-1}$ tedy $v^{-1} = 1+i$.
- Označme k počet konverzí u diskontu a m počet konverzí u úroku. Pak platí:

$$(1-d) = \left[1 - \frac{d_k}{k}\right]^k \quad (1-d)^{-1} = \left[1 - \frac{d_k}{k}\right]^{-k} \quad 1+i = \left[1 - \frac{d_k}{k}\right]^{-k}.$$

Ale taky platí

$$1 + i = \left[1 + \frac{i_m}{m}\right]^m.$$

Tedy dostáváme vztah

$$\left[1 - \frac{d_k}{k}\right]^{-k} = \left[1 + \frac{i_m}{m}\right]^m.$$

Příklad

Najděte nominální diskontní sazbu, k připisování dochází čtvrtletně, která je ekvivalentní 8 % nominální úrokové míře s měsíčním připisováním úroků.

Obsah

Ze vzorce pro budoucí hodnotu S, počítanou principem složeného úročení, vyjádříme úrokovou míru i pro 1 konverzní období:

$$\begin{aligned} S &= P(1+i)^n \\ \frac{S}{P} &= (1+i)^n \\ \sqrt[n]{\frac{S}{P}} &= (1+i) \\ i &= \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1. \end{aligned}$$

Tedy v případě složeného úročení dostáváme roční (nominální) úrokovou míru jako

$$i_m = m\left(\sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1\right).$$

Příklad

Investice vzrostla z 18 000 Kč na 21 410 Kč za 2 roky a 6 měsíců při čtvrtletním připisování úroků. Najděte úrokovou míru pro jedno konverzní období a roční nominální úrokovou míru.

Obsah

Občas je nutné vyjádřit délku období, na které je nutné peníze investovat, aby přinesly požadovaný výnos. Tedy

$$\begin{aligned} S &= P(1+i)^n \\ \frac{S}{P} &= (1+i)^n \\ \ln\left(\frac{S}{P}\right) &= \ln(1+i)^n \\ \ln\left(\frac{S}{P}\right) &= n\ln(1+i) \\ \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\ln(1+i)} &= n \end{aligned}$$

Tedy počet konverzních období n spočítáme jako

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\ln(1+i)}$$

Počítáme-li n většinou nevyjde počet konverzních období jako celé číslo. Pak postupujeme takto:

- Chceme-li **nejbližší počet období** výslednému n, pak postupujeme dle pravidel zaokrouhlování.
- Ptáme-li se na **nejmenší počet období, kdy je splněna nějaká podmínka**, pak vždy zaokrouhlujeme nahoru.
- Ptáme-li se na **přesné datum**, pak je potřeba do výpočtu zapojit i jednoduché úročení. Vypočítáme n, odtrhneme celou část, dopočítáme výši S s celou částí n a pak pro vyjádření přesného počtu zbývajících dní použijeme jednoduché úročení.

Příklad

Jak dlouho bude trvat než nám investice 2 600 Kč vzroste alespoň na 5 000 Kč uvažujeme-li úrokovou míru 6,5 % p.a. a 4 konverze za rok.

Příklad

Najděte den, kdy investice 16 000 Kč vzroste na 24 000 Kč, jestliže jsme investovali 5. 6. 2014 u instituce, která poskytuje úrok 7,25 % p.a. a počet konverzí za rok je 4. Tato společnost umožňuje jednoduché úročení v necelé části úrokovacího období.

Obsah

- Pro mnohé výpočty potřebujeme posouvat hodnotu peněz po časové ose.
- Pokud potřebujeme investice ocenit k danému dni, je nutné umět vypočíst buď jejich budoucí hodnotu, pokud se jedná o datum v budoucnosti nebo jejich současnou hodnotu, pokud se vracíme po ose zpět.

Příklad

Novákovi dnes mají k dispozici částku 458 000 Kč, kterou se rozhodli přenechat svým dětem. Mladší dítě má 12 let a starší 16 let. Peníze do výplaty uloží v bance, která úročí mírou 5,5 % p.a. se 2 konverzemi za rok. Děti mají dostat stejnou částku, která se každému vyplatí při dosažení 21 let.

Obsah

- O **spojitém úročení** mluvíme tehdy, když platí, že počet konverzí $m \to \infty$.
- Připomeňme, že platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

- Pak pro budoucí hodnotu S a $m \to \infty$ platí

$$\begin{aligned} S &= P\left(1+\frac{i_m}{m}\right)^{mt} \\ S &= P\left(1+\frac{1}{\frac{m}{i_m}}\right)^{\frac{m}{i_m} i_m t} \quad \xrightarrow{m\to\infty} \quad Pe^{i_m t}, \end{aligned}$$

kde bývá zvykem označit i_m pro $m \to \infty$ jako δ.

Tedy pro spojité úročení s nominální úrokovou mírou označenou jako δ platí

$$S = Pe^{\delta t}.$$

Současnou hodnotu pak můžeme vyjádřit jako

$$P = \frac{S}{e^{\delta t}} = Se^{-\delta t}.$$

Budeme-li chtít vyjádřit **roční efektivní úrokovou míru** i, která je ekvivalentní nominální úrokové míře při spojitém úročení δ, pak můžeme psát

$$\begin{aligned} (1+i)^t &= e^{\delta t} \\ (1+i) &= e^{\delta} \\ i &= e^{\delta} - 1. \end{aligned}$$

Pokud bychom chtěli vyjádřit **nominální úrokovou míru** δ pak

$$\begin{aligned} (1+i) &= e^{\delta} \\ \ln(1+i) &= \ln e^{\delta} \\ \delta &= \ln(1+i) \end{aligned}$$

Příklad

Najděte nominální úrokovou míru pro spojité úročení, která je ekvivalentní roční efektivní úrokové míře 8 %.

Příklad

Najděte budoucí hodnotu investice 4 000 Kč na 42 měsíců, uvažujeme-li spojité úročení s úrokovou mírou 8 % p.a.