

# Finanční matematika

## Jednoduché úročení

Silvie Zlatošová

2024

# Obsah

- 1 Význam úrokové míry
- 2 Časové principy při výpočtu úroku
- 3 Budoucí hodnota při jednoduchém úročení
- 4 Současná hodnota při jednoduchém úročení
- 5 Porovnání hodnoty peněz v různých časových okamžicích
- 6 Mimořádné splátky
- 7 Průměrný den splatnosti
- 8 Net present value (NPV)

# Obsah

- 1 Význam úrokové míry
- 2 Časové principy při výpočtu úroku
- 3 Budoucí hodnota při jednoduchém úročení
- 4 Současná hodnota při jednoduchém úročení
- 5 Porovnání hodnoty peněz v různých časových okamžicích
- 6 Mimořádné splátky
- 7 Průměrný den splatnosti
- 8 Net present value (NPV)

# Motivace

- Jako **úrok** označujeme cenu vypůjčených peněz. Díky úroku dochází k navyšování hodnoty peněz v průběhu času.
- Vlivem působení **inflace** se hodnota peněz postupně snižuje. Aby tomu lidé zabránili a vliv inflace co nejvíce omezili, investují své peníze nebo je alespoň ukládají v bance, kde očekávají úrok.
- Každá transakce, u které zvážíme peníze a čas, musí zahrnovat **časovou hodnotu peněz**.

# Motivace

- Abychom mohli porovnat různé typy investic, je potřeba porovnat hodnotu investic ve **stejném časovém okamžiku**.
- K tomu je nutné uvažovat posun po časové ose buď dopředu (**budoucí hodnota**) nebo dozadu (**minulá hodnota**).
- Nejjednodušší princip pro srovnání časové hodnoty se nazývá **jednoduché úročení**.

## Základní pojmy

- Peněžní obnos, který je vypůjčený nebo investovaný, budeme označovat jako **jistinu**.
- Poplatek nebo cena za jistinu se nazývá **úrok**. Další označení dle druhu investice může být dividenda, kupón, ...
- Cena jistiny bývá obvykle vyjádřena v procentech za dané časové období. Toto vyjádření označujeme jako **úrokovou míru**.
- Důležitým údajem je také **období** na které je jistina poskytnuta.
- Jestliže je **úrok počítán pouze z výše jistiny a je účtovaný až na konci období**, na které byla jistina poskytnuta, pak mluvíme o **jednoduchém úročení**.

# Výpočet úroku

Vzorec pro výpočet výše úroku podle principu jednoduchého úročení je následující:

$$I = Pit, \quad (1)$$

kde

- $I$  je úrok,
- $P$  je jistina,
- $i$  je roční úroková míra (per annum, p.a.)
- $t$  čas uvedený v letech.

# Využití

- **Jednoduché úročení** se využívá hlavně u produktů splatných do jednoho roku. Jsou to např. spotřebitelské úvěry, směnky, dluhopisy nebo úvěry na kreditních kartách.
- Dlouhodobé produkty (splatnost je delší než jeden rok) jako hypotéky, spořicí účty, atd. využívají obvykle složitější princip úročení nazývaný **složené úročení**.



### Příklad

Uvažujme půjčku 8 000 Kč s úrokem ve výši 7% p.a., která bude splacena za 6 měsíců. Jaká bude výše úroku budeme-li uvažovat jednoduché úročení?

### Příklad

Jestliže je výše úroku z půjčky 9 500 Kč na 9 měsíců 427,5 Kč, jaká je úroková míra půjčky?

### Příklad

Jak dlouho musíme investovat 4 000 Kč, abychom vydělali 350 Kč, víme-li, že úroková míra je 7% p.a. Uvažujme jednoduché úročení.

# Obsah

- 1 Význam úrokové míry
- 2 Časové principy při výpočtu úroku**
- 3 Budoucí hodnota při jednoduchém úročení
- 4 Současná hodnota při jednoduchém úročení
- 5 Porovnání hodnoty peněz v různých časových okamžicích
- 6 Mimořádné splátky
- 7 Průměrný den splatnosti
- 8 Net present value (NPV)

- Ve většině případů není časové období, za které se úrok počítá, určeno v měsících.
- Obvykle je známé datum počátku kontraktu a datum splatnosti, které nemusí připadnout na stejný den v nějakém budoucím měsíci.
- K určení délky období ve dnech využíváme pořadová čísla dní v roce. Jedná se tedy o pořadí od 1 do 366.
- Běžně se využívají dva přístupy:
  - **přesný čas** (exact time) a
  - **aproximativní přístup**.

## Přesný čas

- Princip **přesného času** počítá každý den trvání půjčky kromě prvního.
- Je to proto, že pořadí dne sjednání půjčky se odečte od pořadí dne splatnosti půjčky.
- Např. začíná-li kontrakt 1. ledna a den splatnosti připadá na 10. ledna, pak období půjčky počítáme jako

$$10 - 1 = 9.$$

Pak je úrok počítán za 9 dní.

## Aproximativní přístup

- **Aproximativní** přístup počítá s tím, že každý měsíc má 30 dní.
- Počet měsíců tedy vynásobíme 30 a přičteme zbývající dny, které přesahují 30 denní bloky.
- Např. začíná-li kontrakt 1. ledna a končí 20. února, pak období půjčky počítáme jako

$$1 \cdot 30 + 19 = 49.$$

### Příklad

Uvažujme princip přesného času a vypočtěte délku období úpisu sjednaného 11. února 2022, který byl splatný 31. července 2022.

### Příklad

Určete délku období, dle metody přesného času, od 1. prosince 2021 do 15. března 2022.

# Délka roku

- Pro výpočet úroku je pak potřeba převést počet dní na roky.
- K tomu se využívají dva přístupy:
  - **Ordinární výpočet úroku** (ordinary interest), který uvažuje 360 dní v roce a
  - **Exaktní výpočet úroku** (exact interest), který uvažuje 365 resp. 366 dní v roce.

### Příklad

Vypočtěte jednoduchý úrok z částky 12 000 Kč na 65 dní při úrokové sazbě 7% p.a. Uvažujte

- a) ordinární úrok,
- b) exaktní úrok.

### Příklad

Vypočtěte jednoduchý úrok z částky 2 500 Kč vypůjčené 30. června 2021 a splatné 2. listopadu 2021 s úrokovou sazbou 9,5% p.a. Uvažujte princip přesného času a ordinárního úroku.



### Příklad

Antonín si uložil na spořicí účet s úrokovou sazbou 4,25% p.a. částku 5 680 Kč. Úrok je na účet připisován čtvrtletně. Pokud by došlo k výběru peněz před uplynutím celého úrokovacího období (čtvrt roku), pak nebude úrok za dané období připsán. Pokud Antonín potřebuje 4 550 Kč 45 dní před koncem úrokovacího období, vyplatí se mu vybrat peníze ze svého spořicího účtu nebo si má raději vzít půjčku z kreditní karty, kde je úroková sazba 18% p.a.?

- Máme tedy dva typy určování časového období a dva přístupy k určení délky roku při výpočtu úroku.
- Pokud tyto možnosti nakombinujeme, dostáváme čtyři způsoby výpočtu úroku:
  - **Přesný čas a ordinární úrok** - využíváno nejčastěji bankami, proto se označuje jako **bankovní pravidlo**;
  - **Přesný čas a exaktní úrok** - využíváno na kreditních kartách;
  - **Aproximativní čas a ordinární úrok** - čas je dán v měsících nebo letech
  - **Aproximativní čas a exaktní úrok** - téměř se nevyužívá.

# Obsah

- 1 Význam úrokové míry
- 2 Časové principy při výpočtu úroku
- 3 Budoucí hodnota při jednoduchém úročení**
- 4 Současná hodnota při jednoduchém úročení
- 5 Porovnání hodnoty peněz v různých časových okamžicích
- 6 Mimořádné splátky
- 7 Průměrný den splatnosti
- 8 Net present value (NPV)

- Výrazem **budoucí hodnota (S)** označujeme hodnotu peněz v nějakém budoucím okamžiku, kdy dochází ke zohlednění připsování úroků.
- Jedná se tedy o součet jistiny a úroků.
- Můžeme odvodit vzorec pro výpočet budoucí hodnoty:

$$\begin{aligned} S &= P + I \\ &= P + Pit \\ &= P(1 + it). \end{aligned}$$

Tedy budoucí hodnotu peněz při jednoduchém úročení určíme jako:

$$S = P(1 + it) \quad (2)$$

### Příklad

Kolik si vybereme z účtu, jestliže jsme uložili 1 680 Kč dne 20. 4. při úrokové sazbě 7,5% p.a. a vybírat budeme 30. 10. téhož roku? Pro výpočet úroku využijte bankovní pravidlo.

### Příklad

Uvažujme spořicí účet s úrokem 9,2%. 1. ledna bylo na účtu 3 582,38 Kč. 4. března bylo na účet vloženo 250 Kč a 28. dubna 375 Kč. Kolik peněz bylo na účtu 30. června, pokud uvažujeme jednoduché úročení a bankovní pravidlo?

# Obsah

- 1 Význam úrokové míry
- 2 Časové principy při výpočtu úroku
- 3 Budoucí hodnota při jednoduchém úročení
- 4 Současná hodnota při jednoduchém úročení**
- 5 Porovnání hodnoty peněz v různých časových okamžicích
- 6 Mimořádné splátky
- 7 Průměrný den splatnosti
- 8 Net present value (NPV)

- Uvažujme obligaci u které je nám známá její hodnota v den splatnosti (budoucí hodnota) a výše úrokové míry.
- Abychom byli schopni určit cenu, za kterou by obligace měla být prodávána dnes, potřebujeme určit její **současnou hodnotu P**.
- Můžeme tedy odvodit vzorec:

$$\begin{aligned}S &= P(1 + it) \\ \frac{S}{1 + it} &= \frac{P(1 + it)}{1 + it} \\ \frac{S}{1 + it} &= P\end{aligned}$$

- Současnou hodnotu tedy určíme jako

$$P = \frac{S}{1 + it} \quad (3)$$

### Příklad

Najděte současnou hodnotu obligace, jestliže její cena v den splatnosti bude 1 600 Kč, datum splatnosti je za 15 měsíců a úroková míra je 7%.

### Příklad

Jestliže máte možnost uložit peníze s úrokovou sazbou 7,25%, je výhodnější zaplatit dnes 580 Kč nebo za 9 měsíců 600 Kč?



## Diskontování úpisu

- U půjček s jednoduchým úrokem může dojít k přeprodání třetí straně.
- Ta koupí kontrakt obvykle za nižší cenu než je cena v době splatnosti.
- Proces se nazývá **diskontování úpisu**.
- Chceme najít současnou hodnotu úpisu s použitím úrokové míry, kterou požaduje třetí strana.
- Nový vlastník pak dostane původně domluvenou hodnotu v čase splatnosti.
- **Výpočet obvykle probíhá ve dvou krocích**, kdy nejdříve zjistíme cenu úpisu v čase splatnosti (budoucí hodnotu). Poté najdeme současnou hodnotu, kdy využijeme úrokovou sazbu, kterou požaduje nový vlastník, a budoucí hodnotu úpisu.

### Příklad

Najděte hodnotu úpisu na částku 8 000 Kč s úrokem 9,25% splatného za 18 měsíců, jestliže byl 5 měsíců před splatností diskontován se sazbou 8%.

# Obsah

- 1 Význam úrokové míry
- 2 Časové principy při výpočtu úroku
- 3 Budoucí hodnota při jednoduchém úročení
- 4 Současná hodnota při jednoduchém úročení
- 5 Porovnání hodnoty peněz v různých časových okamžicích**
- 6 Mimořádné splátky
- 7 Průměrný den splatnosti
- 8 Net present value (NPV)

**Zlaté pravidlo financí:** Peníze není možné sčítat nebo porovnávat, pokud nejsou oceněny ke stejnému časovému okamžiku.

### Příklad

Na základě smlouvy může zákazník zaplatit za zboží 2 000 Kč okamžitě a následně provede dvě splátky, první po 6 měsících, kdy zaplatí 3 000 Kč, a druhou po 9 měsících, kdy zaplatí 4 000 Kč. Úroková sazba je 12%. Jaká by byla cena zboží, pokud by ho zaplatil okamžitě celé? (Je nutné vypočítat současnou hodnotu všech splátek).

### Příklad

Uvažujme úvěr ve výši 4 500 Kč sjednaný 2. října, který má být splacen dvěma stejně vysokými splátkami v následujícím roce. První splátka má proběhnout 15. února a druhá splátka pak 15. dubna. Úroková míra je ve výši 7,5%. Určete výši těchto splátek. Uvažujte bankovní pravidlo pro výpočet výše úroku.

### Příklad

Uvažujme osobu, která emitovala dvě obligace. Jedna je splatná za 3 měsíce v hodnotě 8 250 Kč a druhá je splatná za 15 měsíců v hodnotě 12 480 Kč. Úroková míra je ve výši 5,5%. Jaká bude hodnota těchto závazků za 9 měsíců?

# Obsah

- 1 Význam úrokové míry
- 2 Časové principy při výpočtu úroku
- 3 Budoucí hodnota při jednoduchém úročení
- 4 Současná hodnota při jednoduchém úročení
- 5 Porovnání hodnoty peněz v různých časových okamžicích
- 6 Mimořádné splátky**
- 7 Průměrný den splatnosti
- 8 Net present value (NPV)

- V případě úvěrů úročených jednoduchým úrokováním musí být **v den splatnosti** splacena **jistina a úrok z jistiny**.
- Některé úvěrové produkty ale umožňují klientovi **mimořádné splátky**, kdy dochází ke splacení části úvěru k dřívějšímu datu.
- Jsou známé dva přístupy k výpočtu zůstatku dluhu v případě mimořádných splátek u jednoduchého úročení:
  - **Kupecké pravidlo** - spíše historický význam, téměř se již nevyužívá. Uvažuje zůstatek dluhu v den splatnosti jako součet budoucích hodnot jistiny (ta je záporná) a splátek (kladné).
  - **US (United states) pravidlo** - bývá využíváno v případě kreditních karet, pokud nedochází k navyšování dluhu. K datu, kdy je učiněna mimořádná splátka je vyčíslen celý dluh i s úroky a od této sumy je splátka odečtena. Poté uvažujeme novou dlužnou částku, ze které je počítán úrok.

### Příklad

Uvažujme jednoduché úrokování. Klient si vzal půjčku ve výši 5 000 Kč, která je splatná za 15 měsíců při úrokové míře 9% p.a. Učinil dvě mimořádné splátky, jednu ve výši 1 200 Kč po 4 měsících a druhou ve výši 950 Kč po 9 měsících. Určete výši dluhu v den jeho splatnosti. Využijte Kupecké pravidlo i pravidlo US.



# Obsah

- 1 Význam úrokové míry
- 2 Časové principy při výpočtu úroku
- 3 Budoucí hodnota při jednoduchém úročení
- 4 Současná hodnota při jednoduchém úročení
- 5 Porovnání hodnoty peněz v různých časových okamžicích
- 6 Mimořádné splátky
- 7 Průměrný den splatnosti**
- 8 Net present value (NPV)

- Uvažujme situaci, kdy máme **dluh splatit několika splátkami** v budoucnosti. U těchto splátek známe jejich **výši a čas**, kdy mají být provedeny.
- **Stejný dluh** je ale možné **splatit jednou splátkou** která bude odpovídat **součtu výše uvedených splátek**. Pro tuto splátku ale musíme **určit čas**, kdy má být provedena.
- Hledaný termín, kdy se hodnota jediné splátky rovná součtu původních splátek, se nazývá **průměrný den splatnosti**.
- Budeme ho označovat  $\bar{t}$  a obvykle bývá vyjádřeno jako počet dnů od současnosti.

### Příklad

Dluh má být umořen dvěma splátkami. Obě mají být ve výši 1 800 Kč a jsou splatné za 45 dní a za 90 dní. Úroková míra je 7% p.a. Najděte termín, kdy by stejný dluh byl umořen jednou splátkou ve výši 3 590 Kč.

### Příklad

Developer má nasmlouvanou práci za 15 000 Kč za 35 dní, 21 000 Kč za 45 dní a za 30 000 Kč za 75 dní. Uvažujme úrokovou sazbu 5,5%. Najděte průměrné datum splatnosti, kdy by nasmlouvaná práce mohla být uhrazena jedinou splátkou.

# Zobecnění

- Celou situaci můžeme **zobecnit**.
- Budeme **předpokládat**, že **výše jediné splátky se rovná výši součtu původních splátek**, pak datum  $\bar{t}$  bude předcházet datu poslední splátky.
- **Označme:**
  - $P_1$  výše první splátky v čase  $t_1$ ;
  - $P_2$  výše druhé splátky v čase  $t_2$ ;
  - $\vdots$
  - $P_n$  výše n-té splátky v čase  $t_n$ ;
  - $P$  výše jediné ekvivalentní splátky v čase  $\bar{t}$ .
- **Platí:**  $P = P_1 + P_2 + \dots + P_n$ .

- **Předpokládejme**, že  $\bar{t}$  bude datum, ke kterému budeme počítat časovou hodnotu peněz a  $i$  bude úroková míra za jednotku času. Tím nám vypadne 360 z jmenovatele zlomku vyjadřujícího délku času.
- Pak můžeme vyjádřit hodnotu splátek jako:

$$P [1 + i(\bar{t} - \bar{t})] = P_1 [1 + i(\bar{t} - t_1)] + \dots + P_n [1 + i(\bar{t} - t_n)] .$$

- A odtud vyjádříme **průměrný den splatnosti** jako

$$\bar{t} = \frac{P_1 t_1 + P_2 t_2 + \dots + P_n t_n}{P} . \quad (4)$$

### Příklad

Uvažujme osobu, která musí uhradit 5 závazků: 3 200 Kč za 30 dní, 2 400 Kč za 48 dní, 5 000 Kč za 60 dní, 4 500 Kč za 90 dní a 7 000 Kč za 118 dní. Určete průměrný čas splatnosti, kdy mohou být všechny závazky ve výši 22 100 Kč uhrazeny najednou.

# Obsah

- 1 Význam úrokové míry
- 2 Časové principy při výpočtu úroku
- 3 Budoucí hodnota při jednoduchém úročení
- 4 Současná hodnota při jednoduchém úročení
- 5 Porovnání hodnoty peněz v různých časových okamžicích
- 6 Mimořádné splátky
- 7 Průměrný den splatnosti
- 8 Net present value (NPV)**

- V situaci, kdy společnost investuje do zboží nebo majetku, je potřeba ověřit, jakou budou mít tyto výdaje **míru návratnosti**.
- Jedním ze způsobů, jak porovnat náklady a očekávaný výnos, je nalezení **net present value (NPV)**.
- NPV určuje rozdíl mezi náklady a výnosy, kdy porovnáváme současnou hodnotu těchto veličin.
- Míra výnosnosti se pro tyto účely nazývá **náklady na kapitál** a obecně koresponduje s cíli a požadavky na investice.



## Postup výpočtu NPV

- Ukážeme si zjednodušený postup, kdy jsou všechny budoucí výnosy přeneseny do současnosti za předpokladu vybrané míry výnosnosti.
- Poté jsou porovnány se současnou hodnotou investic.
- V rovnici pro NPV budou mít výnosy kladné znaménko a výdaje záporné znaménko.
- Jestliže výsledná NPV bude kladná, pak budou naplněny cíle společnosti na investici a společnost bude mít vyšší než očekávaný výnos.

### Příklad

Určete NPV investice 25 000 Kč při očekávané míře výnosnosti 14 % ročně, jestliže investice vynesou 14 000 Kč za 9 měsíců a dalších 15 000 Kč za 14 měsíců.