Finanční matematika

Diskontní sazba

Silvie Zlatošová

2024

Obsah

Obsah

Základní pojmy

- **Jednoduchý diskont** nebo bankovní diskont je založen na budoucí hodnotě s úrokem zaplaceným před uplynutím doby splatnosti.
- Suma peněz, která má být vrácena, je **budoucí hodnota**.
- Sazba využitá k výpočtu úrokových poplatků se nazývá **diskontní sazba**.
- Důležité bude také **období**, na které je půjčka poskytnuta.
- Úrokový poplatek za poskytnutí peněz budeme nazývat **diskont**.
- Suma peněz, kterou obdržíme na začátku úvěru, je **současná hodnota**.

Výpočet diskontu

- Je potřeba si uvědomit, že současnou hodnotu vypočítáme jako budoucí hodnotu sníženou o diskont.
- Diskont vypočítáme jako budoucí hodnotu vynásobenou časovým obdobím a diskontní sazbou.

Vzorec pro výpočet diskontu je tedy

$$D = Sdt \quad \text{a platí} \quad D = S - P, \tag{1}$$

kde

- D je diskont,
- S je budoucí hodnota,
- d je roční diskontní sazba,
- t je čas v letech
- P je současná hodnota.

- Půjčky s diskontní sazbou nejsou tak rozšířené jako půjčky s jednoduchým úročením, ale jedná se o poměrně častý způsob výpočtu úroku.
- S diskontem bývají prodávány některé obchodovatelné cenné papíry jako směnky, pokladniční poukázky nebo některé druhy dluhopisů.

Příklad

Uvažujme cenný papír, jehož hodnota v době splatnosti za 6 měsíců bude 6 000 Kč. Dnes je možné ho koupit za 5 745 Kč. Jaká je diskontní sazba?

Příklad

Dlužní úpis, jehož hodnota v den splatnosti je 3 500 Kč, je splatný 28. 11. Jestliže tento úpis může být prodán s diskontní sazbou 7,5 % dne 30. 6., jaký bude diskont? Jaká je současná hodnota úpisu? Použijte bankovní pravidlo.

Současná hodnota

Platí

$$
\begin{aligned}
P &= S - D \\
P &= S - Sdt \\
P &= S(1 - dt).
\end{aligned}
$$

Tedy současnou hodnotu vypočítáme jako

$$P = S(1 - dt). \tag{2}$$

Budoucí hodnota

V případě, že známe výši půjčky, kterou budeme potřebovat a chceme dopočítat budoucí hodnotu S pak

$$\begin{aligned} P &= S(1-dt) \\ \frac{P}{1-dt} &= \frac{S(1-dt)}{1-dt} \\ \frac{P}{1-dt} &= S. \end{aligned}$$

Tedy platí

$$S = \frac{P}{1-dt} = P(1-dt)^{-1} \tag{3}$$

Příklad

Banka poskytuje krátkodobé půjčky s diskontní sazbou 7 %. Jaká je současná hodnota půjčky 6 850 Kč na 8 měsíců?

Příklad

Obchodník s automobily poskytuje svým zákazníkům půjčky s diskontní sazbou 12 %. Zákazník má za zakoupený vůz doplatit 56 000 Kč. Jakou částku si musí půjčit, pokud půjčku splatí za 15 měsíců?

Obsah

- **Jednoduchý úrok** je založen na **současné hodnotě** zatímco **diskont** je založen na **budoucí hodnotě**.
- Proto půjčka s diskontní sazbou je dražší než půjčka se stejnou výší úrokové míry.
- Uvažujme roční půjčku se současnou hodnotou 4 500 Kč a úrokovou sazbou 10 %. Ta bude zákazníka stát 450 Kč. Ale pokud bychom uvažovali stejnou půjčku s diskontní sazbou, pak by stála 500 Kč.
- Pokud by cena půjčky měla být stejná, pak by úroková sazba musela být vyšší.

- Proto je důležité umět určit **úrokovou míru, která je ekvivalentní diskontní míře.**
- "Ekvivalentní" je myšleno tak, že obě míry budou produkovat stejný výnos.
- Budeme uvažovat případ, kdy oba typy půjček mají totožnou současnou i budoucí hodnotu. Pak výnos z půjček musí být stejný (ale nikoliv úroková a diskontní míra).

Tedy můžeme psát:

půjčka s diskontem **půjčka s jednoduchým úrokem**

$$P = S(1 - dt) \quad \text{a} \quad P = \frac{S}{1 + it}$$

$$S(1 - dt) = \frac{S}{1 + it}$$

$$
\begin{aligned}
1 - dt &= \frac{1}{1 + it} \\
1 + it &= \frac{1}{1 - dt} \\
it &= \frac{1 - (1 - dt)}{1 - dt} \\
it &= \frac{dt}{1 - dt}
\end{aligned}
$$

Odtud vyjádříme

$$
i = \frac{d}{1 - dt}. \tag{4}
$$

Podobně můžeme řešit pro d

$$
d = \frac{i}{1 + it} \tag{5}
$$

Příklad

Najděte jednoduchou úrokovou míru ekvivalentní diskontní sazbě 12 % na 15 měsíců.

Příklad

Najděte diskontní sazbu ekvivalentní jednoduché úrokové míře 9,5 % na 9 měsíců.

Příklad

Uvažujme cenný papír zakoupený za 65 000 Kč, který byl za 56 dní prodán za 66 500 Kč. Jaká je míra zisku, vyjádříme-li ji pomocí diskontní sazby i jednoduché úrokové míry? Využijte pravidlo přesného úroku (rok má 365 dní).

Obsah

- **Dlužní úpis** je cenný papír prodávaný s diskontní sazbou, přestože obvykle dochází k výpočtu úroků z něj na základě úrokové míry.
- Prodej úpisu a výpočet úroků jsou dvě odlišné transakce, které probíhají v rozdílných časových okamžicích.
- Uvažujme držitele úpisu, který přijde do banky a chce ho prodat s diskontem. Protože je diskont založen na budoucí hodnotě, bude nutné nejdříve vypočíst hodnotu úpisu v den splatnosti.
- U některých druhů úpisů nedochází k vyplácení úroků a je známá jeho hodnota v den splatnosti.
- Úkolem bude najít **prodejní cenu úpisu**.

Nalezení prodejní ceny diskontovaného úpisu probíhá ve dvou krocích:

1) Nalezení hodnoty úpisu v den splatnosti, pokud se nejedná o úpis bez úroků;
2) Nalezení současné hodnoty úpisu ke dni prodeje (diskontování) úpisu.

Příklad

Dne 12. 6. byl vydán dlužní úpis na částku 12 000 Kč. Tento úpis vyplácí úrok ve výši 6,5%. Splatnost úpisu je za 270 dní. 20. 10. je úpis prodán s diskontem 8 %. Za jakou cenu byl úpis prodán? Použijte bankovní pravidlo.

Obsah

- Jako příklad pokladničních poukázek můžeme uvažovat ministerstvem financí Spojených států emitované T-bills (Treasury Bills).
- Jedná se o krátkodobé cenné papíry, díky kterým si americká vláda půjčuje finanční prostředky.
- Bývají prodávány s diskontem a nedochází u nich k vyplácení úroku.
- Výnos z investice představuje rozdíl mezi prodejní cenou a hodnotou v den splatnosti.
- Cena nabídky bývá udávána v procentech na maximálně 3 desetinná místa.
- Například: Nabídka 96,250 za poukázku v hodnotě 10 000$ znamená, že prodejní cena poukázky je 9 625$. Pak výnos z investice bude 375$.
- Naším úkolem obvykle bude vypočítat diskontní sazbu (míru výnosnosti - rate of return, ROR).

Příklad

Najděte míru výnosnosti pokladniční poukázky v hodnotě 10 000$, má-li dobu splatnosti za 91 dní a nabídka zní 96,250.

Příklad

Nabídka na poukázky s hodnotou 500 000$ je 96,625. Doba splatnosti poukázky je za 182 dní. Vyjádřete míru výnosnosti jako diskontní sazbu i jako jednoduchou úrokovou míru.

Obsah

Obsah

- Označme si jako $A(t)$ obnos (budoucí hodnotu), který získáme z jistiny za časové období t.
- Množství peněz nahromaděné za období t jsme počítali jako součin jistiny a úrokového faktoru.
- Pokud za jistinu dosadíme 1, pak dostaneme **akumulační funkci** $a(t)$, která odpovídá úrokovému faktoru.
- U **jednoduchého úročení** vycházíme z předpokladu, že **úrok** vydělaný za měřitelný časový interval je **konstantní**.
- To znamená, že **nedochází k reinvestování úroků**, tedy úroky nepřinášejí další úroky.

Následující definice využívá výpočtu plochy pod křivkou k vyjádření akumulační funkce u jednoduchého úročení:

Definice

Akumulační funkce vyjadřuje akumulovanou změnu množství jako plochu oblasti mezi mírou změny (úroková míra) a horizontální osou (osa x - vyjadřuje čas t).

- Jedná se o **určitý integrál** na intervalu $[0, t]$ pro t měřitelných period, který je funkcí t.
- V případě jednoduchého úročení je míra změny konstantní, tedy je rovna (i).
- Akumulační funkce $a(t)$ je založena na myšlence, že jistina je rovna 1 v čase $t = 0$, tedy $a(0) = 1$.
- Potom je nutné tuto počáteční hodnotu přičíst k výsledné ploše. Tedy $a(t) = 1 + \int_0^t i \, \mathrm{d}s = 1 + i(t - 0) = 1 + it$.

- Dosadíme-li za jistinu hodnotu P, pak můžeme psát, že hodnota obnosu v čase 0 je P, tedy $A(0) = P$.
- Míra změny za čas je pak vyjádřena jako Pi.
- Odtud již dostáváme známé vyjádření budoucí hodnoty $A(t) = P + Pit = P(1 + it)$.

Tedy můžeme vyjádřit:

Akumulační funkce:	$a(t) = 1 + it,$	$t \geq 0$ a $a(0) = 1$
Obnosová funkce:	$A(t) = P(1 + it),$	$t \geq 0$ a $A(0) = P$.
Platí vztah:	$A(t) = A(0)a(t).$	

Definice

Efektivní míra úrokové míry *i je poměr úroku vydělaného za měřené období a hodnoty jistiny na počátku měřeného období.*

- Jedná se tedy o procentuální vyjádření změny v hodnotě jistiny neboli o procentuální vyjádření přírůstku jistiny.
- Vyjádříme-li efektivní míru úroku za období od 0 do 1, pak

$$\frac{A(1)-A(0)}{A(0)}=\frac{P(1+i\cdot 1)-P(1+i\cdot 0)}{P}=\frac{P[(1+i)-1]}{P}=i.$$

Budeme-li chtít vyjádřit efektivní míru na n-té období při dané úrokové míře i, pak platí:

$$i_n = \frac{a(n) - a(n-1)}{a(n-1)} = \frac{1 + in - (1 + i(n-1))}{1 + i(n-1)} = \frac{i}{1 + i(n-1)}.$$

Tedy

$$i_n = \frac{i}{1 + i(n-1)}. \tag{6}$$

Je vidět, že efektivní míra úroku pro n-té období klesá s rostoucím počtem období n.

Příklad

Najděte efektivní míru pro období 1, 2, 3 a 4 roky, jestliže úroková míra je 5 % .

Obsah

- Pro obnosovou funkci v případě jednoduchého diskontu platí
$$A(t) = \frac{A(0)}{1 - dt}, \quad \text{kde } A(0) = P$$
- Položíme-li $A(0) = 1$, pak získáme akumulační funkci
$$a(t) = \frac{1}{1 - dt}.$$
- Míra změny akumulační funkce zde není konstantní jako u jednoduchého úroku. Je možné ji vyjádřit první derivací jako
$$a'(t) = \frac{d}{(1 - dt)^2}.$$

Definice

Efektivní míra diskontní sazby *d je poměr výnosu za dané měřené období a hodnoty investice na konci měřeného období.*

- U půjček s diskontem jsou úroky zaplaceny předem. Ten, kdo si půjčuje, získá pouze současnou hodnotu, ale na konci období musí vrátit celý obnos půjčky, tedy budoucí hodnotu.
- Pro efektivní míru diskontní sazby za období od 0 do 1 platí

$$\frac{A(1)-A(0)}{A(1)} = \frac{\frac{A((0)}{1-1\cdot d} - \frac{A(0)}{1-0\cdot d}}{\frac{A(0)}{1-1\cdot d}} = \frac{\frac{1}{1-d} - 1}{\frac{1}{1-d}} = 1-(1-d) = d.$$

Budeme-li chtít vyjádřit efektivní míru diskontu za n-té měřené období pří diskontní sazbě d, pak platí:

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{a(n)-a(n-1)}{a(n)} = \frac{\frac{1}{1-dn}-\frac{1}{1-d(n-1)}}{\frac{1}{1-dn}} = 1-\frac{\frac{1}{1-d(n-1)}}{\frac{1}{1-dn}} \\ &= \frac{d}{1-d(n-1)}. \end{aligned}$$

Tedy

$$d_n = \frac{d}{1-d(n-1)}. \tag{7}$$

Je vidět, že efektivní míra diskontu pro n-té období roste s rostoucím počtem období n.

Příklad

Najděte efektivní míru diskontu na 1, 2 a 3 roky, jestliže roční diskontní sazba je 6 %.