Obsah tutoriálu

- Výroková logika
- Matice
- Lineární nezávislost
- Determinanty a inverzní matice
- Soustavy lineárních rovnic

Výroková logika - výrok

- Logika - věda, která se zabývá usuzováním, pravdivostí, dokazatelností a vyvratitelností.
  - „Číslo 6 je dělitelné 3 a zároveň 4.“
- Výrok: každá oznamovací věta, u které lze určit pravdivost.
  - „Jablko je ovoce“ (pravdivý výrok).
  - „Číslo 8 je prvočíslo“ (nepravdivý výrok).
  - „ESF je nejlepší fakulta na světě“ - NENÍ výrok.
- Atomický výrok: nejjednodušší výrok.
  - „Číslo 6 je dělitelné 3.“
  - „Číslo 6 je dělitelné 4.“

Výroková logika - spojky

- Výrokové spojky:
  - $\wedge$ konjunkce - „a“ - „a současně“,
  - $\vee$ disjunkce - „nebo“,
  - $\Rightarrow$ implikace - „jestliže … pak“,
  - $\Leftrightarrow$ ekvivalence - „právě tehdy, když“ - „tehdy a jen tehdy, když“,
  - $\neg$ negace.

Example

Snědl jsem jablko. Snědl jsem hrušku.
Snědl jsem jablko a hrušku. (*konjunkce*)
Snědl jsem jablko nebo hrušku. (*disjunkce*)
Jestliže jsem snědl jablko, pak jsem snědl i hrušku. (*implikace*)
Snědl jsem jablko právě tehdy, když jsem snědl hrušku. (*ekvivalence*)
Nesnědl jsem jablko. (*negace*)

Výroková logika - formule

- Formule: složení atomických výroků pomocí spojek.
  - Výše uvedené příklady jsou formule.
  - Výroky značíme pomocí velkých písmen.

Example

$$\begin{array}{lll} A & \dots & \text{„Snědl jsem jablko,“} \\ B & \dots & \text{„Snědl jsem hrušku.“} \end{array}$$

$A \wedge B$, (*konjunkce*)
$A \vee B$, (*disjunkce*)
$A \Rightarrow B$, (*implikace*)
$A \Leftrightarrow B$, (*ekvivalence*)
$\neg A$. (*negace*)

Výroková logika - pravdivost

- Pravdivost:
  - atomický výrok platí $\longrightarrow$ pravdivost 1,
  - atomický výrok neplatí $\longrightarrow$ pravdivost 0,
  - pro formule viz tabulka níže

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

$\neg A$	$\neg B$	$\neg(A \Rightarrow \neg B)$	$\neg A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

Výroková logika - pravdivost

Example

```
A<-c(T,T,F,F);B<-c(T,F,T,F)
A& B
A | B
imp<-function(A,B){!A | B}
imp(A,B)
eqv<-function(A,B){(A& B)|(!A & !B)}
eqv(A,B)
```

- Negace

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg B \wedge A$	$(\neg B \wedge A) \vee (\neg A \wedge B)$
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0

Example

Napište pravdivostní tabulku pro formuli $A \Rightarrow (B \wedge \neg(A \vee B))$.

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$B \wedge \neg(A \vee B)$
1	1	1	0	0
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	0

$A \Rightarrow (B \wedge \neg(A \vee B))$
0
0
1
1

- Tautologie, kontradikce.

Example

Pan Spock každé pondělí, úterý a středu lže, kdežto pan Dat lže ve čtvrtek, pátek a v sobotu. V ostatní dny mluví chlapci pravdu. Jednou se ovšem potkali a proběhl následující rozhovor:

> Pan Spock: „Včera jsem lhal.“
>
> Pad Dat: „Jo, já taky.“

Který je den?

Example

Pan Spock každé pondělí, úterý a středu lže, kdežto pan Dat lže ve čtvrtek, pátek a v sobotu. V ostatní dny mluví chlapci pravdu. Jednou se ovšem potkali a proběhl následující rozhovor:

Pan Spock: „Včera jsem lhal."

Pad Dat: „Jo, já taky."

Který je den?

Dat \ Spock	Pravda	Lež
Pravda	×	×
Lež	čtvrtek	×

Example

Ze třídy byla ukradena třídní kniha. Podezřelí jsou Antonín, Barbora a Cyril. Bylo zjištěno, že:

V době krádeže nebyl ve třídě Antonín nebo tam nebyla Barbora.

Pokud v době krádeže nebyla ve třídě Barbora, nebyl tam ani Antonín.

Cyril byl ve třídě právě tehdy, když tam nebyl Antonín.

Pachatel byl v době krádeže ve třídě sám.

U koho má učitel třídní knihu hledat?

Example

Ze třídy byla ukradena třídní kniha. Podezřelí jsou Antonín, Barbora a Cyril. Bylo zjištěno, že:

V době krádeže nebyl ve třídě Antonín nebo tam nebyla Barbora.

Pokud v době krádeže nebyla ve třídě Barbora, nebyl tam ani Antonín.

Cyril byl ve třídě právě tehdy, když tam nebyl Antonín.

Pachatel byl v době krádeže ve třídě sám.

U koho má učitel třídní knihu hledat?

A	B	C	$\neg A \vee \neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$C \Leftrightarrow \neg A$
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1

Kvatifikátory

- ∀ Pro všechny - $\forall x \in (-2,5) : |x| < 6.$
- ∃ Existuje - $\exists x \in (-2,5) : |x| < 1.$

Negace

- $\neg(\forall x : A) \Leftrightarrow \exists x : \neg A$
- $\neg(\exists x : A) \Leftrightarrow \forall x : \neg A$

Example

Definice limity L v bodě a

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{O}_a : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Matice

- dvojrozměrné obdélníkové pole či tabulka čísel, které chápeme jako jeden objekt
- matice A o rozměru $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Example

Matice A o rozměru 2×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \pi & \mathrm{e} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Example

Zapište matici 2×2 zadanou prvky $a_{ij} = i + j - 1$.

Matice

Example

Zapište matici 2×2 zadanou prvky $a_{ij} = i + j - 1$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Example

(A <- matrix(c(1, 2, 2, 3), 2)) ... po sloupečcích zadáváme

- čtvercová matice: $m = n$.
- řádkový/sloupcový vektor: $m/n = 1$.
- Matice značíme velkými písmeny $A, B, \ldots$ a vektory malými písmeny $x, \mathbf{x}, \vec{x}, \ldots$

Operace s maticemi

- ROVNOST: $A = B$, pokud mají stejný rozměr a prvky na odpovídajících si pozicích se rovnají, tzn. $a_{ij} = b_{ij}$.
- SČÍTÁNÍ: $A \pm B = C$, musí mít stejný rozměr a prvky na odpovídajících si pozicích sečteme/odečteme, tzn. $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.
- NÁSOBENÍ SKALÁREM: $c \cdot A = B$, všechny prvky vynásobíme daným číslem, tzn. $b_{ij} = c \cdot a_{ij}$.

Example

Nalezněte čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$, tak aby platila rovnost

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ b - c & c + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Operace s maticemi

- ROVNOST: $A = B$, pokud mají stejný rozměr a prvky na odpovídajících si pozicích se rovnají, tzn. $a_{ij} = b_{ij}$.
- SČÍTÁNÍ: $A \pm B = C$, musí mít stejný rozměr a prvky na odpovídajících si pozicích sečteme/odečteme, tzn. $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$.
- NÁSOBENÍ SKALÁREM: $c \cdot A = B$, všechny prvky vynásobíme daným číslem, tzn. $b_{ij} = c \cdot a_{ij}$.

Example

Nalezněte čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$, tak aby platila rovnost

$$\begin{pmatrix} a & 3 \\ b - c & c + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení: $a = 2, c = 3, b = 1$.

Operace s maticemi

Example

Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2,5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Určete $2A$ a $2A + B$.

Example

Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2,5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Určete $2A$ a $2A + B$.

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2A + B = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Example

```
A <- matrix(c(1,-2,1,2.5),2)
B <-matrix(c(7,-2,3,-4),2)
```

Násobení skalárem:

```
2*A
2*A + B
```

- NÁSOBENÍ DVOU MATIC: $C = A \cdot B$, kde A, B je matice o rozměru $n \times m$, resp. $m \times l$ a matice C je rozměru $n \times l$. Prvky matice C vzniknou následovně: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Operace s maticemi

Example

```
A <- matrix(c(1,2,1,3,3,4),2)
B <- matrix(c(-1,-2,3,0,-1,1),3)
```

Maticové násobení:

```
A %*% B
B %*% A
```

Operace s maticemi

- asociativita: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- distributivita zprava: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C)$
- distributivita zleva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- je-li $c \in \mathbb{R}$, pak $(c \cdot A) \cdot B = A \cdot (c \cdot B) = c \cdot (A \cdot B)$
- obecně NEPLATÍ komutativita $A \cdot B \neq B \cdot A$

Example

Je-li $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, pak $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$, ale $B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Jednotková matice

- Pro reálná čísla: $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$.
- Označení: I. Čtvercová matice. Na hlavní diagonále jsou 1 a všude jinde 0.
- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pak

$$I_2 \cdot A = A \cdot I_3 = A.$$

Jednotková matice

Example

```
A <- matrix(c(1,4,2,5,3,6),2)
I2 <- diag(2)
I3 <- matrix(c(1,0,0,0,1,0,0,0,1),3)
```

Musíme násobit matice „správných“ rozměrů:

```
I2 %*% A
A %*% I3
```

Naopak dostaneme chybu:

```
I3 %*% A
A %*% I2
```

Transponovaná matice

- Prohodíme sloupce a řádky.
- Označení: A^T nebo A'.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

```
A <-matrix(c(1,4,2,5,3,6),2);(t(A))
```

- Symetrická matice: $A = A^T$.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = A^T$$

Lineární závislost

- Řekneme, že vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže rovnice

$$a_{11}\mathbf{x}_1 + a_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n = \vec{0}$$

  má pouze triviální řešení, tzn. $a_{11} = a_{12} = \cdots = a_n = 0$. V opačném případě říkáme, že jsou vektory *lineárně závislé*.
- Lineární kombinace (levá strana), soustava rovnic

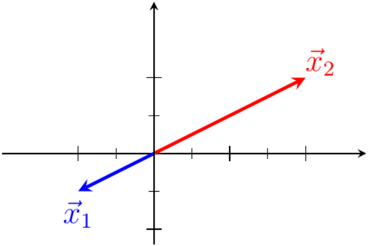
Example

Mějme $\mathrm{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathrm{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zřejmě platí

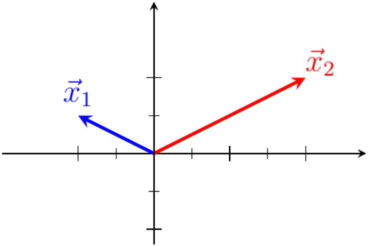
$$1 \cdot \mathrm{u} + 2 \cdot \mathrm{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vektory u, v jsou lineárně závislé.

Lineární závislost



Obrázek: Lineárně závislé vektory.



Obrázek: Lineárně nezávislé vektory.

Hodnost matice

- Počet lineárně nezávislých sloupců/řádků matice.
- Značíme $h(A)$.

Example

Buď $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pak $h(A) = 2, h(I) = 3$.

Gaussova eliminační metoda

- Elementární řádkové úpravy:
  - vynásobení řádku nenulovým číslem,
  - prohození dvou řádků,
  - přičtení libovolného násobku jednoho řádku k řádku jinému.
- Dostáváme ekvivalentní matice (nesou stejnou informaci co se závislosti týče).
- Upravíme do schodovitého tvaru.

Example

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow h(A) = 3$

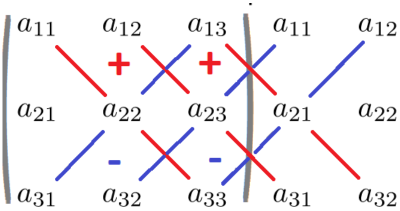
```
A<-matrix(c(1,1,2,2,1,0,3,4,6),3)
library(pracma)
rref(A)
```

Determinant

- Číslo, které přiřadíme čtvercové matici, značíme $det(A)$ nebo $|A|$.
  - regulární matice: $det(A) \neq 0$
  - singulární matice: $det(A) = 0$
- matice 1×1 : $det\,(a) = |a| = a$
- matice 2×2 : $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- matice 3×3 :
  $det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$

Determinant

- Sarrusovo pravidlo (pouze pro matice 3×3)



- $|A| = |A^T|$

Determinant - Laplaceův rozvoj

- Sníží řád matice pro výpočet determinantu.
- $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |C_{ij}|$, kde matice C_{ij} vznikne z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.
- Pro jednoduchost vybíráme řádek či sloupec s největším počtem 0.

Example

Je-li $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, pak podle druhého řádku

$$|A| = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$1 + 0 + 0 + (-2) = -1$$

Example

```
A <- matrix(c(0,1,1,0,1,0,-1,2,-1,0,1,-1,2,2,-1,0),4);(det(A))
```

Example

Je-li $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, pak podle prvního sloupce

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$0 + 1 + (-2) + 0 = -1$$

Determinant - přímý výpočet

- Má-li matice pod hlavní diagonálou samé 0, pak je determinant roven součinu prvků na hlavní diagonále.
- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$
- Pomocí elementárních řádkových úprav
  - vynásobení řádku nenulovým číslem $\Rightarrow$ determinant daným číslem vydělím,
  - prohození dvou řádků $\Rightarrow$ determinantu změním znaménko,
  - přičtení libovolného násobku jednoho řádku k řádku jinému $\Rightarrow$ determinant nezměním.

Determinant - přímý výpočet

Example

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$$

Inverzní matice

- pro reálná čísla: $a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = 1$
- Značíme A^{-1}. Definice: $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$.
  - čtvercová matice
  - regulární matice

Example

Je-li $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pak $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Example

Výpočet inverzní matice k $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

```
A <- matrix(c(0,1,1,1,0,2,-1,2,1),3);(solve(A))
```

Inverzní matice - Jordanova eliminační metoda

- Zapíšeme rozšířenou matici a pomocí elementárních řádkových úprav získáme inverzní matici

$$(A|I) \sim \cdots \sim (I|A^{-1}).$$

Example

$$A \ldots \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \ldots A^{-1}$$

- Ověřit.

Adjungovaná matice a inverze

- Adjungovaná matice: $\mathrm{adj}\, A =$

$$= \begin{pmatrix} +|C_{11}| & -|C_{12}| & \cdots & (-1)^{1+n}|C_{1n}| \\ -|C_{21}| & +|C_{22}| & \cdots & (-1)^{2+n}|C_{2n}| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}|C_{n1}| & (-1)^{n+2}|C_{n2}| & \cdots & (-1)^{n+n}|C_{nn}| \end{pmatrix}^T,$$

  kde matice C_{ij} vznikly z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.
- Inverzní matice: $A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\, A}{|A|}$,
  - determinant musí existovat a být různý od 0.

Adjungovaná matice a inverze

Example

Mějme $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Nejprve spočtěme determinant a poté adjungovanou matici.

$$|A| = 0 + 2 + (-2) - 0 - 0 - 1 = -1$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -4 & +1 & +2 \\ -3 & +1 & +1 \\ +2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -4 & -3 & +2 \\ +1 & +1 & -1 \\ +2 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dohromady tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} +4 & +3 & -2 \\ -1 & -1 & +1 \\ -2 & -1 & +1 \end{pmatrix}.$$

- Systém lineárních rovnic:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & \dots & + & a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{array}$$

- Maticový zápis daného systému:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{\textit{matice soustavy}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\text{vektor neznámých}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\text{vektor pravých stran}} .$$

- $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$

Maticový zápis

Example

Uvažujme systém

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 7, \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 3, \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 1. \end{array}$$

Pak maticový zápis tohoto systému je

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}.$$

Gausova eliminační metoda

- Převedeme do maticového zápisu . . . rozšířená matice soustavy.
- Pomocí elementárních řádkových úprav převedeme rozšířenou matici soustavy do tvaru, aby pod diagonálou byly samé 0.

Example

$$
(A|\mathbf{b}) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 9 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -21 & 37 \end{array}\right)
$$

- Převedeme zpátky do soustavy rovnic a danou soustavu vyřešíme.

Example

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ & & & - & 21x_3 & = & 37 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{37}{21}$$

$$\Rightarrow x_2 = -4 - 2 \cdot \left(-\frac{37}{21}\right) = -\frac{10}{21}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 + 3 \cdot \left(-\frac{10}{21}\right) - \left(-\frac{37}{21}\right) = \frac{70}{21}$$

Example

Řešení soustavy rovnic:

```
A<-matrix(c(2,1,-1,3,-3,2,-1,1,-3),3)
b<-c(7,3,1)
x<-solve(A,b)
```

Cramerovo pravidlo

- Umožňuje přímý výpočet soustavy lineárních rovnic ($m = n$):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{|A_1|}{|A|}, \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{|A_n|}{|A|}, \end{aligned}$$

kde matice A_i vznikne z matice soustavy A nahrazením i-tého sloupce vektorem pravých stran.

Example

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 18 - 3 - 2 + 3 - 4 + 9 = 21$$

Example

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 63 + 3 - 6 - 3 - 14 + 27 = 70$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 7 - 1 - 3 - 2 + 21 = -10$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 9 + 14 - 21 - 12 - 3 = -37$$

$$\Rightarrow x_3 = -\frac{37}{21}, \qquad x_2 = -\frac{10}{21}, \qquad x_1 = \frac{70}{21}.$$

Determinant

- Co když $|A| = 0$?

Example

Pro systém

$$\begin{array}{rcrcrcrr} & x & + & y & = & & 2 \\ - & x & - & y & = & - & 2 \end{array}$$

je determinant matice soustavy

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

- $|A| = 0$ značí, že jsou jednotlivé rovnice (řádky matice) na sobě lineárně závislé.

Počet řešení soustavy rovnic

- Právě jedno řešení:
  - počet lineárně nezávislých rovnic = počet neznámých,
  - $h(A) = h(A|b) = n$.
- Nekonečně mnoho řešení:
  - počet lineárně nezávislých rovnic < počet neznámých,
  - $h(A) = h(A|b) < n$.
- Žádné řešení:
  - když dojdeme ke "sporu",
  - $h(A) < h(A|b)$.

Example

Systém

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 2 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}$$

zřejmě nemá žádné řešení.