Obsah tutoriálu

- Vlastní čísla a vektory
- Funkce a limity
- Derivace

Vlastní čísla, vlastní vektory

- Definice: Jestliže pro nenulový vektor $\mathbf{v}$ a reálné číslo λ platí
$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v},$$
pak $\mathbf{v}$ nazýváme *vlastní vektor* a λ *vlastní číslo* k matici A.
- Postup
$$A \cdot \mathbf{v} - \lambda \mathbf{v} = \vec{0}$$
$$(A - \lambda I) \cdot \mathbf{v} = \vec{0}$$
$$det(A - \lambda I) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$$
$$(A - \lambda_i I) \cdot \mathbf{v} = \vec{0}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$$

Example

Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
|A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\cdot(-\lambda) - 3\cdot(-1) \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\lambda_1 : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\lambda_2 : \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

Vlastní čísla, vlastní vektory

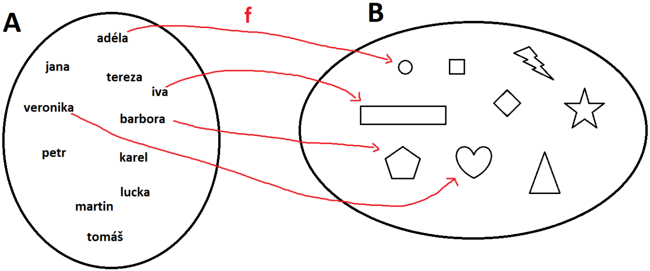
Example

```
A<-matrix(c(4,3,-1,0),2)
eigen(A)
eigen(A)$values
eigen(A)$vectors
```

Vlastní vektor je libovolný násobek:

```
eigen(A)$vectors[,1]/eigen(A)$vectors[1]
eigen(A)$vectors[,2]/eigen(A)$vectors[3]
```

Funkce



- Funkcí $f : A \to B$ nazýváme pravidlo/předpis, který prvkům z množiny A přiřadí nejvýše jeden prvek z množiny B.
- Množinu prvků z A, které se na něco zobrazí nazýváme definiční obor $D(f) = \{$adéla, iva, veronika, barbora$\}$.
- Množinu prvků z B, na které se něco zobrazí nazýváme obor hodnot $H(f) = \{$kolečko, obdélník, pětiúhelník, srdce$\}$.

Funkce

- Funkci zadáváme předpisem, tabulkou, výčtem prvků.
- Reálná funkce reálné proměnné: $A = B = \mathbb{R}$.
- Zadáváme předpisem: $y = f(x)$.

Obrázek: Funkce $f : y = \sqrt{x}$, $D(f) = \langle 0, \infty)$, $H(f) = \langle 0, \infty)$

Example

plot(function(x) sqrt(x), xlim=c(-1,9), col="red", lwd = 3, ylab="y", main = "y=sqrt(x)")

Funkce - definiční obor

- $\frac{\text{čitatel}}{\text{jmenovatel}}$ ... jmenovatel $\neq 0$
- $\sqrt[2n]{\text{argument}}$ ... argument ≥ 0
- log(argument) ... argument > 0

Example

Určete definiční obor funkce $f: \ y = \frac{3x}{\sqrt{(x-1)^2-1}}$. Máme tu dvě problémové funkce ... zlomek a odmocninu. Nejprve se podíváme na zlomek. Tedy ve jmenovateli nesmí být 0. Řešíme rovnici

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x-1)^2-1} &= 0 \\
(x-1)^2-1 &= 0 \\
(x-1)^2 &= 1 \\
x_1 = 2, \ x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Tedy v definičním oboru nesmí být body 0 a 2.

Example

Dále pod odmocninou nesmí být záporné číslo, tzn. řešíme nerovnici

$$
\begin{aligned}
(x-1)^2 - 1 &\geq 0 \\
(x-1)^2 &\geq 1 \\
x \geq 2 \wedge x &\leq 0
\end{aligned}
$$

Dohromady máme $D(f) = (-\infty, 0) \cup (2, \infty) = \mathbb{R} \setminus \langle 0, 2\rangle$. Jelikož je v tomto příkladě ve jmenovateli zlomku pouze daná odmocnina, mohli jsme to počítat najednou, jako $(x-1)^2 - 1 > 0$.

Funkce, parita

- Řekneme, že funkce f je *sudá*, jestliže $D(f)$ je symetrický podle 0 a $f(-x) = f(x)$.
- Řekneme, že funkce f je *lichá*, jestliže $D(f)$ je symetrický podle 0 a $f(-x) = -f(x)$.

Example

Rozhodněte o paritě funkcí $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$ a $g(x) = \frac{x^2+1}{x+3}$.

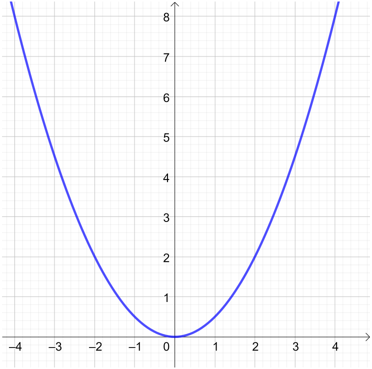
$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^3} = \frac{x^2+1}{-x^3} = -\frac{x^2+1}{x^3} = -f(x) \Rightarrow f \text{ je lichá}$$

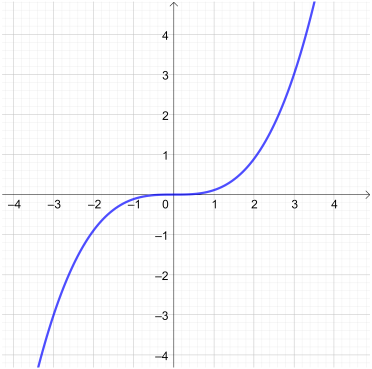
$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-3\} \Rightarrow g \text{ není ani sudá ani lichá}$$

Funkce, parita

- sudá - graf osově symetrický podle osy y
- lichá - graf středově symetrický podle počátku



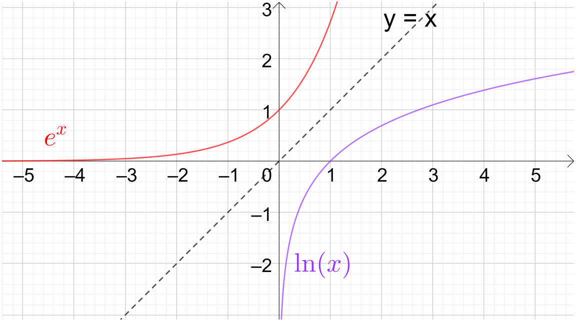
Obrázek: Funkce $y = \frac{x^2}{2}$ je sudá.



Obrázek: Funkce $y = \frac{x^3}{9}$ je lichá.

Funkce, inverzní funkce

- Značíme $f^{-1}(x)$.
- Definice: $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.
- Existuje pouze pro prosté funkce (stále rostoucí či stále klesající).
- Grafy f a $f^{-1}(x)$ jsou osově symetrické podle osy $y = x$.



Obrázek: Funkce $y = \mathrm{e}^x$ je inverzní k $y = \ln(x)$ a naopak.

Funkce, inverzní funkce

Example

Určete inverzní funkci k funkci $f : y = x^2 + 1$.

$$\begin{aligned} f^{-1} : x &= y^2 + 1 \\ x - 1 &= y^2 \\ \sqrt{x-1} &= |y| \\ y &= \pm\sqrt{x-1} \end{aligned}$$

Funkce f není prostá $\Rightarrow$ neexistuje inverze. Pokud bychom do zadání přidali definiční obor $\langle 0, \infty)$, pak by $f^{-1} : y = \sqrt{x-1}$.

- $D(f) = H(f^{-1})$
- $H(f) = D(f^{-1})$

- Limita - zkoumáme chování funkce v okolí určitého bodu
  - v daném bodě spojitá/definovaná $\to$ funkční hodnota
  - jinak limita - „nekonečné přiblížení“

Example

x	1	0,1	0,01	0	-0,01	-0,1	- 1
$\frac{\sin x}{x}$	0.8415	0.9983	0.9999		0.9999	0.9983	0.8415

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu L, jestliže

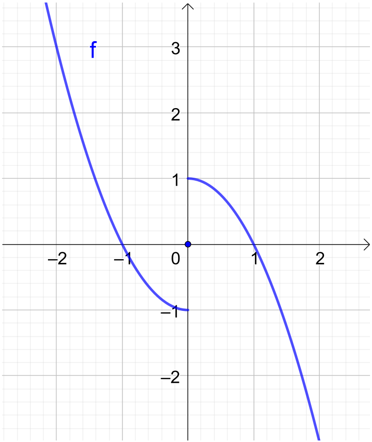
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{R} \text{ platí: } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Značení: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L.$

Funkce, limita zprava/zleva

- K bodu se můžeme blížit zleva ($\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$) nebo zprava ($\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \dots \quad x < 0 \\ 0 & \dots \quad x = 0 \\ -x^2 + 1 & \dots \quad x > 0 \end{cases}$$



  - $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -1$
  - $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = 1$
  - $f(0) = 0$

Funkce, limita

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\text{ohraničená funkce}}{\text{„nekonečno“}} = 0$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x)$ a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, pak $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
- Pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, pak
  - $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = A + B$,
  - $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,
  - $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, pro $B \neq 0$.

Funkce, limita - L'Hospitalovo pravidlo

- Pro limity typu "$\frac{0}{0}$" a "$\pm\frac{\infty}{\infty}$".
- Pokud existuje $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Example

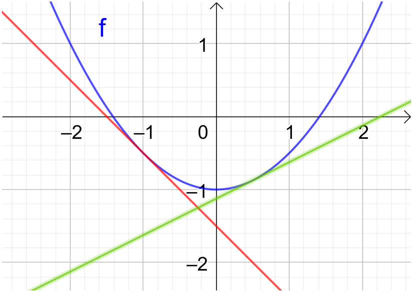
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6}{x^3-7x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x^2-7} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{6x} = \left|\frac{2}{\infty}\right| = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} 1+\cos x = \nexists$$

$$= \lim_{x\to\infty} 1+\frac{\sin x}{x} = 1$$

Funkce, derivace

- Definice: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- Směrnice tečny v daném bodě.
  - Rovnice tečny: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.
  - Diferenciál
  - $f'(x) < 0 \ldots$ klesající funkce
  - $f'(x) > 0 \ldots$ rostoucí funkce
  - $f'(x) = 0$



- $f''(x), f^{(3)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$

Funkce, počítání derivací

$[k]' = 0$, je-li k konstantní funkce,

$[x^a]' = a \cdot x^{a-1}$

$[\sin x]' = \cos x$,

$[\cos x]' = -\sin x$,

$$[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$[\operatorname{cotg} x]' = \frac{-1}{\sin^2 x},$$

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$[\arccos x]' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$[\operatorname{arccotg} x]' = \frac{-1}{1+x^2},$$

$[a^x]' = a^x \cdot \ln a$, pro $a > 0$,

$$[\log_a x]' = \frac{1}{x \cdot \ln a}, \text{ pro } a > 0, a \neq 1,$$

$[e^x]' = e^x$,

$$[\ln x]' = \frac{1}{x}.$$

$$[f+g]' = f' + g'$$

$$[f-g]' = f' - g'$$

$$[fg]' = f'g + fg' \qquad \text{součinové pravidlo}$$

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \text{podílové pravidlo}$$

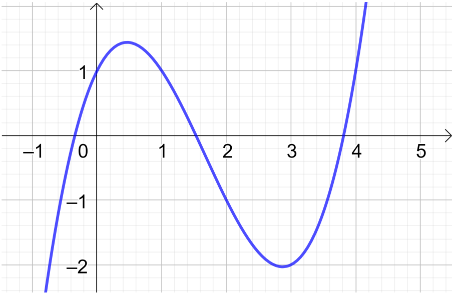
$$[g(f)]' = g'(f)\cdot f' \qquad \text{řetízkové pravidlo}$$

Example

$$\mathrm{tg}'x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

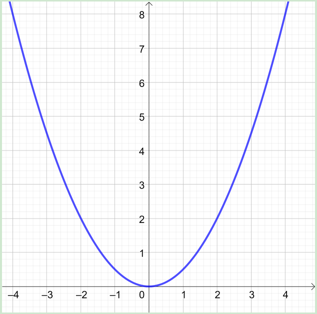
$$\left(\mathrm{e}^{x^2+3}\right)' = \mathrm{e}^{x^2+3}\cdot(x^2+3)' = \mathrm{e}^{x^2+3}\cdot(2x+0) = 2x\mathrm{e}^{x^2+3}$$

$$\left(\ln\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = x\cdot\left(x^{-1}\right)' = x\cdot\left(-1\cdot x^{-2}\right) = -\frac{1}{x}$$

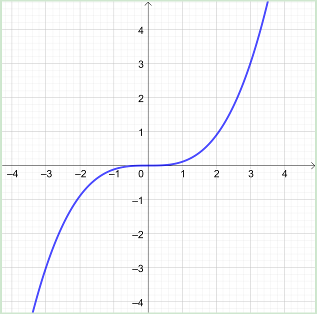


- Lokální extrémy
  - Maximum - „před“ funkce roste, „po“ funkce klesá.
  - Minimum - „před“ funkce klesá, „po“ funkce roste.
- Lokální extrém $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.
- $f'(x_i) = 0$ + tam kde není definovaná $\Rightarrow$ stacionární body = kandidáti na extrém.

Example



Obrázek: Funkce $f : y = \frac{x^2}{2}$.

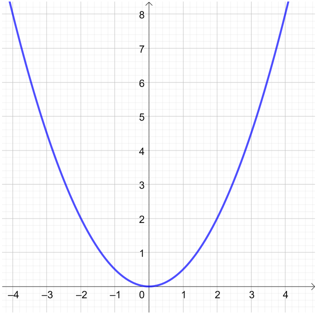


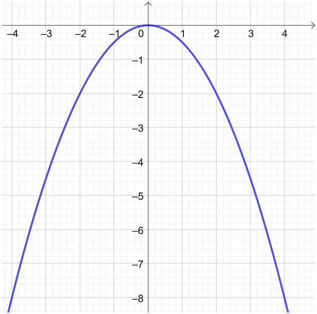
Obrázek: Funkce $g : y = \frac{x^3}{9}$.

Body, kde je derivace nulová jsou kandidáti na extrém.

$$f'(x) = x \quad \Rightarrow \quad x_{1,f} = 0 \quad \ldots \quad \text{minimum}$$
$$g'(x) = \frac{x^2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_{1,g} = 0 \quad \ldots \quad \text{není extrém}$$

Funkce, konvexnost, konkávnost





- Konvexní funkce - v každém bodě leží „nad“ tečnou.
- Konkávní funkce - v každém bodě leží „pod“ tečnou.
- Derivace
  - konvexní ... $f''(x) > 0$,
  - konkávní ... $f''(x) < 0$,
  - $f''(x_i) = 0 \Rightarrow$ kandidáti na změnu zakřivení $\Rightarrow$ inflexní body.

Funkce, asymptoty

- Asymptota = tečna v nekonečnu.
- Asymptoty bez směrnice
  - kolmé na osu x, tzn. přímky $x = x_i$
  - v bodech nespojitosti,
  - v krajích definičního oboru,
  - $\lim_{x\to x_i} f(x) = \pm\infty$.
- Asymptoty se směrnicí
  - přímky $y = ax + b$, pro x jdoucí k plus/minus nekonečnu
  - $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$,
  - $b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - ax\right)$.

Example

Funkce $y = \frac{1}{x}$ má asymptotu bez směrnice $x = 0$ a se směrnicí $y = 0$.