

## Cílové programování

Představuje jiný přístup k řešení úlohy LP. Místo stanovení omezujících podmínek a kritéria optimality se zde stanoví **pevné a volné cíle** s přiřazenými **cílovými hodnotami**. U pevných cílů musí být tato hodnota splněna (analogie omezujících podmínek). U volných cílů můžeme dosáhnout vyšší i nižší hodnoty než je cíl (avšak ne moc odlišné). Protože cílových hodnot bývá několik a zpravidla není možné dosažení všech, volí se obvykle jeden ze dvou přístupů:

- ▶ pomocí **preferencí** - nejprve je optimalizován cíl s nejvyšší preferencí, atd. nebo
- ▶ pomocí **vah** - koeficientů vyjadřujících důležitost daného cíle, optimalizuje se pak vážený součet odchylek od všech cílů

Modely cílového programování jsou obecnější než standardní modely LP, protože v praxi zpravidla nemáme jediné kritérium optimality, ale sledujeme více hodnot.

## Cílové programování - příklad

Příklad z J. Jablonský, Operační výzkum: Vedení penzijního fondu se rozhoduje o nákupu dvou druhů cenných papírů (akcie a obligace). Má k dispozici prostředky, které není nutné úplně vyčerpat, nelze je však překročit. Do akcií lze investovat maximálně 50 % celkového objemu prostředků a do obligací maximálně 75 % prostředků. Očekávaný výnos z **akcií je 15 %** a z **obligací 10 %** p.a., míra rizika investice je ohodnocena koeficientem **5 u akcií** a **2 u obligací**. Navrhněte takovou skladbu portfolia  $[x_1, x_2]$ , aby se dosáhlo průměrného **výnosu 12 %** p.a. a aby byla vážená míra **rizika rovna 3**.

Při standardním přístupu LP bychom museli zvolit jako účelovou funkci jen jedno z nich, např. výnos a k omezujícím podmínkám pro objem investic přidat další omezení, totiž že míra rizika nesmí překročit hodnotu 3. Lze spočítat, že optimálního řešení při tomto přístupu dosáhneme, dáme-li  $\frac{1}{3}$  prostředků do akcií a  $\frac{2}{3}$  do obligací. Při průměrném **riziku 3** tak získáme **11,67 %** p.a.

Nebo naopak budeme minimalizovat účelovou funkci vyjádřenou váženým rizikem a jako dodatečnou podmínku stanovíme omezení, aby průměrný výnos byl nejméně 12 % p.a. Pak je optimální investovat 40 % prostředků do akcií a 60 % do obligací. Při výsledném výnosu **12 %** p.a. pak bude míra **rizika 3,2**.

## Cílové programování - formulace modelu

U volných cílů se používají **odchytkové proměnné** pro vyjádření kladných a záporných odchylek (značíme je  $d_i^+$ , resp.  $d_i^-$ ) od cílových hodnot. Je-li cíle splněn, platí  $d_i^+ = d_i^- = 0$ , dojde-li k přesáhnutí cíle, pak je  $d_i^+ > 0$ ,  $d_i^- = 0$  a není-li cíl dosažen, je  $d_i^+ = 0$ ,  $d_i^- > 0$ . Pevné cíle musí být respektovány, žádné odchylky se nepřipouští.

V modelu cílového programování je vždy účelová funkce vyjádřena jako **minimalizace odchytkových proměnných**, přičemž do ní lze zahrnout buď pouze kladné, pouze záporné nebo oba typy odchylek (pak se cílovým hodnotám blížíme shora, zdola nebo "oboustranně"). Zápis úlohy o optimalizaci portfolia by tedy byl:

$$d_2^+, d_1^- \rightarrow \min,$$

za podmínek:

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 \leq 0,5; x_2 \leq 0,75$$

$$15x_1 + 10x_2 + d_1^+ - d_1^- = 12$$

$$5x_1 + 2x_2 + d_2^+ - d_2^- = 3$$

$$x_1, x_2, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \geq 0$$

## Cílové programování - odlišení cílů vahami

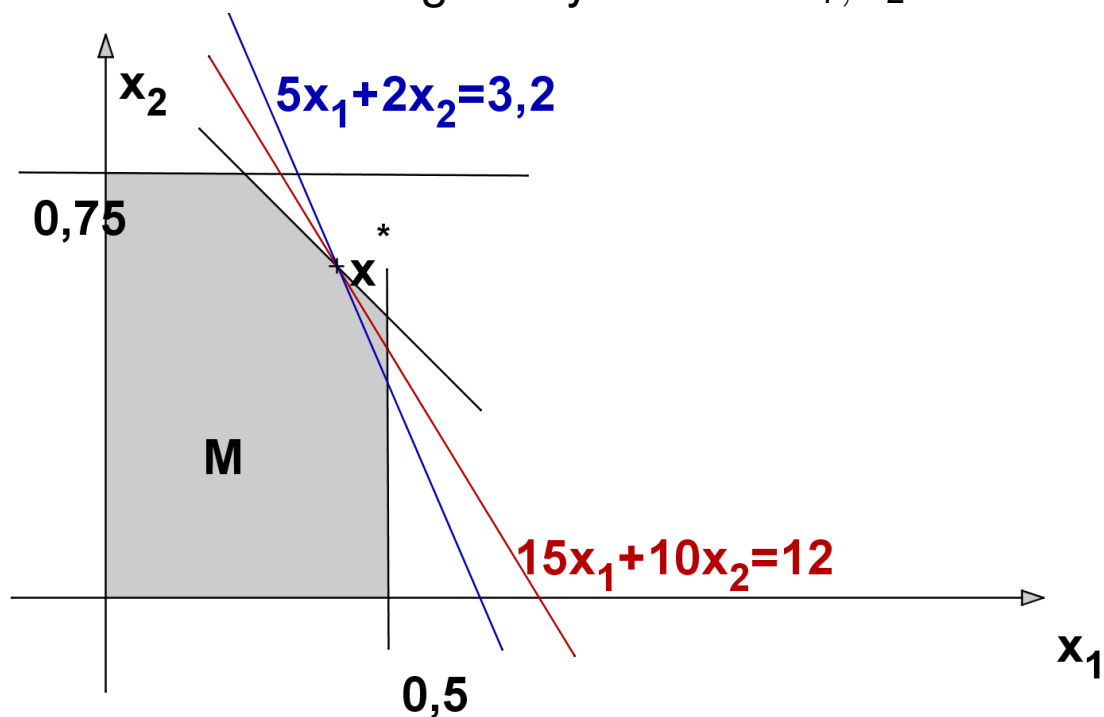
Při současné minimalizaci více odchylek můžeme odlišit jejich důležitost **vahami**. Abychom se vyhnuli problémům s různými jednotkami, je lepší pracovat s relativními odchylkami  $\frac{d_i^+}{g_i}$ ,  $\frac{d_i^-}{g_i}$ , kde  $g_i$  značí  $i$ -tou cílovou hodnotu. Pokud je pro nás výnos pětikrát důležitější než riziko, stanovíme váhy 5 a 1 a účelová funkce bude mít podobu  $z = 5 \frac{d_1^-}{12} + \frac{d_2^+}{3}$ . Dále lze úlohu řešit běžnou simplexovou metodou.

Řešením je dát  $\frac{1}{3}$  prostředků do akcií a  $\frac{2}{3}$  do obligací, přitom je zcela splněna cílová hodnota rizika a výnos je 11,67%.

## Cílové programování - odlišení cílů preferencemi

Při odlišení cílů **preferencemi** minimalizujeme nejprve odchylku od důležitějšího cíle a pokud má množina optimálních řešení více prvků, minimalizujeme na této množině druhou nejzávažnější odchylku, atd. Má-li v naší úloze vyšší prioritu výnos, minimalizujeme nejprve  $d_1^-$ .

Znázorníme situaci graficky v rovině  $x_1, x_2$ .



Protože se přímky protínají mimo přípustnou množinu, nelze dosáhnout rovnosti  $d_2^+ = 0$ . Musíme riziko zvýšit, tj. posunout modrou přímku tak, aby se dotkla optimální úsečky pro  $d_1^-$ . Našli jsme bod optima  $x^* = [0, 4; 0, 6]$ .

## Vícekriteriální programování

Ve vícekriteriálním programování jde o optimalizaci více účelových funkcí na přípustné množině definované sadou omezení. Narozdíl od úloh VHV je množina variant v úlohách nekonečná a kritéria jsou definována v podobě funkcí. Jsou-li všechny účelové funkce i omezující podmínky lineární, mluvíme o vícekriteriálním lineárním programování (VLP). Problém VLP tedy můžeme formulovat jako úlohu "optimalizovat"

$$z_1 = \mathbf{c}^1 \cdot \mathbf{x}, z_2 = \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x}, \dots, z_k = \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{x},$$

za podmínek

$$\mathbf{x} \in \mathbf{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

kde  $\mathbf{c}^i$  je cenový vektor  $i$ -té účelové funkce.

Pomocí ekvivalence minimalizační úlohy pro  $z_i$  s maximalizační úlohou pro  $-z_i$  můžeme převést úlohu do takové podoby, aby všechna kritéria měla maximalizační charakter. Úlohu je pak možné zapsat pomocí maticového zápisu, označíme-li  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_k)$  vektor účelových funkcí a  $\mathbf{C}$  matici vytvořenou z cenových vektorů  $\mathbf{c}^1, \mathbf{c}^2, \dots, \mathbf{c}^k$ :

$$\mathbf{z} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$$

## Model VLP - základní pojmy

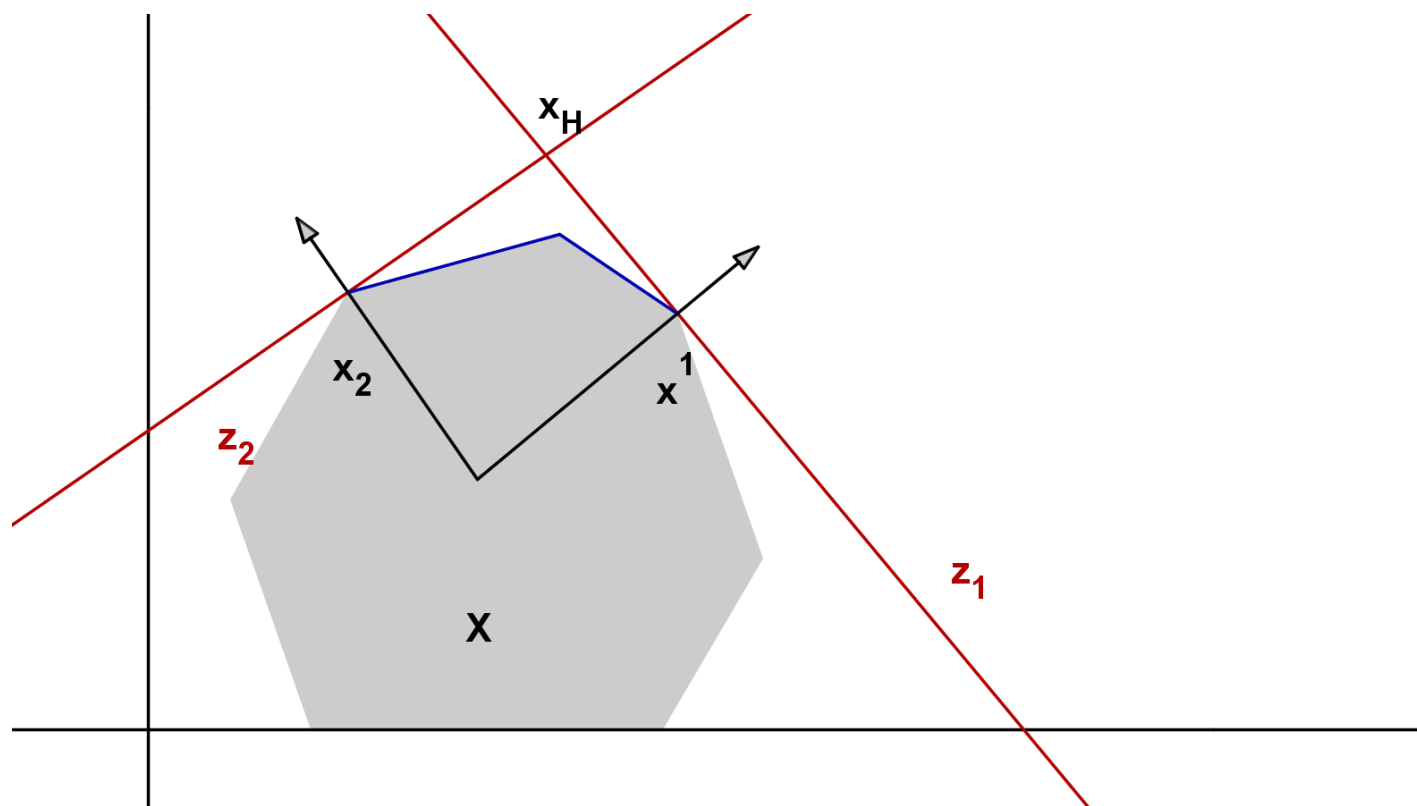
Podobně jako u VHV je typicky cílem nalézt v množině všech přípustných řešení pomocí vhodného postupu nějaké prakticky přijatelné, tzv.

**kompromisní** řešení. Je dobré si uvědomit, že při hledání kompromisního řešení se opět stačí omezit na **nedominovaná** řešení. Řešení  $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$  je nedominované, pokud neexistuje žádné přípustné řešení, jehož vektor kritériálních hodnot by byl ve všech složkách větší nebo roven vektoru  $\mathbf{C} \cdot \mathbf{x}$  (s vyloučením případu rovnosti vektorů).

Většina principů pro hledání kompromisního řešení je založena na řešení dílčích úloh lineárního programování  $z_i = \mathbf{c}^i \cdot \mathbf{x} \rightarrow \max, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$  standardní simplexovou metodou. Vektor  $\mathbf{x}_H$ , ve kterém všechny účelové funkce nabývají svých optimálních hodnot nazýváme **ideální řešení**. Analogicky bychom mohli zavést **bazální řešení**  $\mathbf{x}_D$ . Optimální a bazální řešení zpravidla neleží v přípustné množině.

## Model VLP - grafické znázornění

Vícekritériální lineární model je možné zobrazovat v rozhodovacím nebo kritériálním prostoru. Nejprve schematicky znázorníme úlohu se dvěma proměnnými v rozhodovacím prostoru, kde souřadné osy budou reprezentovat hodnoty proměnných.

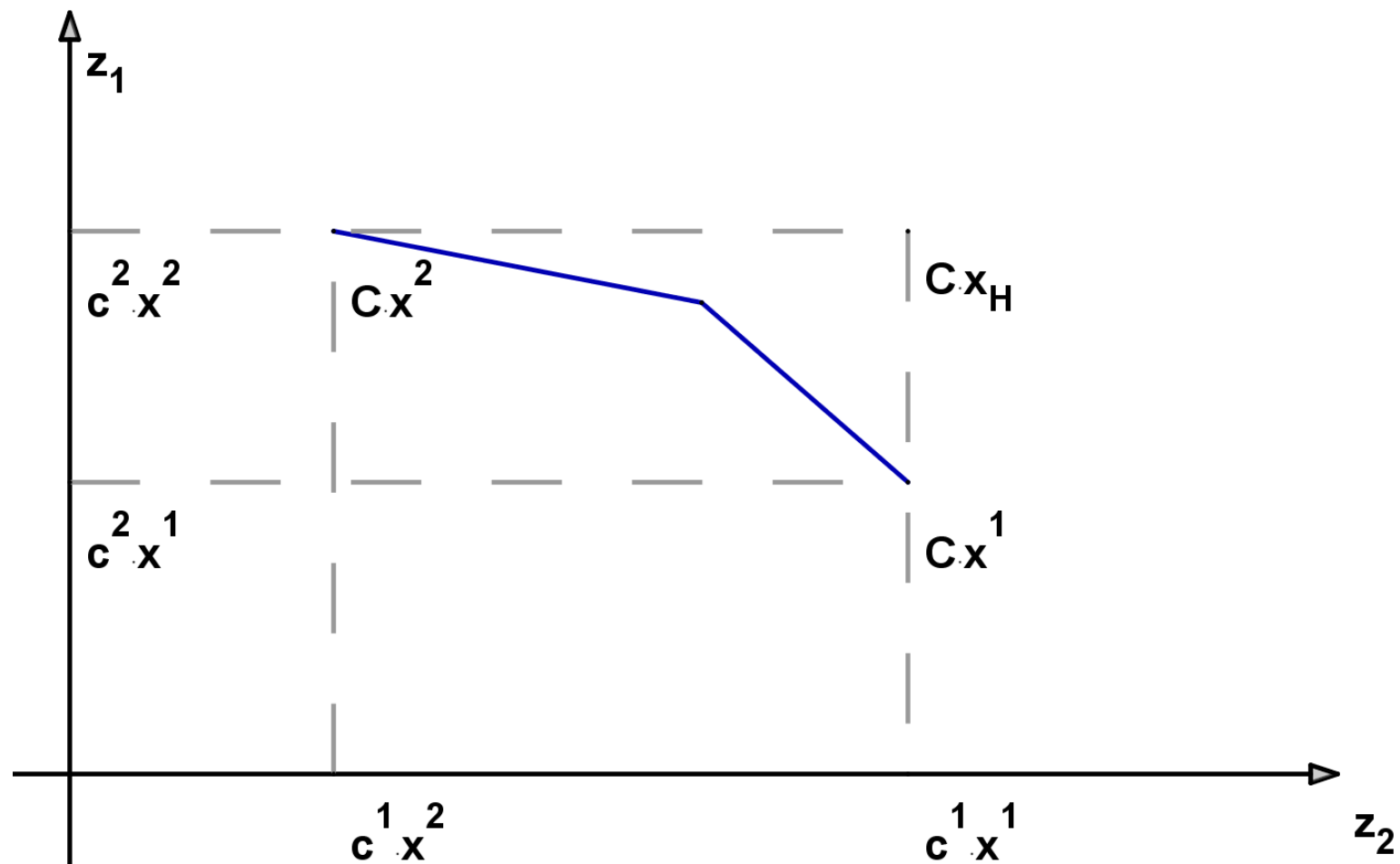


Na hranici množiny přípustných řešení vymezené kritériálním kuželem leží všechna nedominovaná řešení.



## Model VLP - grafické znázornění

Při zobrazování v kritériálním prostoru vynášíme na jednotlivé osy přímo hodnoty účelových funkcí.



Modře jsou vyznačeny nedominované hodnoty

## Vícekriteriální programování - klasifikace metod

Při řešení úloh VLP můžeme požadovat výsledky v podobě úplného popisu množiny nedominovaných řešení nebo nalezení nějaké její reprezentativní podmnožiny nebo výběru několika kompromisních variant. Chce-li uživatel vybrat jedinou kompromisní variantu, bude jeho rozhodnutí značně záviset na preferencích jednotlivých kritérií. Ty mohou být zadávány v různých fázích výpočtu:

- ▶ **před** započítáním výpočtu,
- ▶ interaktivně **v průběhu** výpočtu,
- ▶ **po** skončení výpočtu,

a to opět prostřednictvím aspiračních úrovní kritérií, pořadím kritérií, váhami kritérií nebo mírou kompenzace kriteriálních hodnot. Podle toho, kdy je informace o kritériích do modelu zapracována, dělíme výpočetní metody na:

- ▶ metody s preferenční informací **a priori**
- ▶ metody s preferenční informací **a posteriori**
- ▶ metody **s postupným zpřesňováním** preferenční informace
- ▶ metody kombinované

# Vícekriteriální programování - klasifikace metod

Metody s informací **apriori** dělíme do několika skupin:

- ▶ metoda lexikografická
- ▶ metoda minimální komponenty
- ▶ řešení jednokriteriální úlohy s agregovanými kritérii
- ▶ záměna kritérií za omezení
- ▶ "minimalizace odchylek" od ideálních hodnot (při vhodně zvolené metrice)

Metody s informací **aposteriori** spočívají v popisu množiny nedominovaných řešení, ve které následně uživatel vybírá kompromisní řešení. Patří sem:

- ▶ metoda parametrická (agregujeme kritéria s parametricky zadaným vektorem vah)
- ▶ metoda omezení (hledá nedominovaná řešení, kde hodnoty kritérií dosahují parametricky zadaných cílových hodnot)
- ▶ vícekriteriální simplexový algoritmus (postupně určuje nedominovaná bazická řešení)

Metody **interaktivní** probíhají iterativně a jsou založeny na komunikaci mezi uživatelem a rozhodovatelem.

## Vícekriteriální programování - příklad

Příklad z knihy Tomáš Šubrt, Ekonomicko-matematické metody: Vedení půjčovny lyžařského a snowboardového vybavení zvažuje optimalizaci sortimentu zboží. Do kalkulací zahrnuje obvyklou cenu za půjčení vybavení i riziko, že utrpí ztrátu, protože vybavení nebude půjčeno. Denní zisk [v Kč] při půjčení jednotlivých kompletů i riziko ztráty při nepůjčení [v bodech] jsou uvedeny v tabulce.

	lyžařský komplet sjezdový dospělý	lyžařský komplet sjezdový dětský	lyžařský komplet běžecký	snowboardový komplet
zisk	300	200	170	250
riziko	10	15	25	5

Společnost chce investovat nejvýše 1 mil. Kč do nákupu kompletů, přičemž snowboardové komplety chce nakoupit alespoň za 200 tis. Kč. Pořizovací cena každého z kompletů je 10 tis. Kč. Navrhněte, jak má společnost investovat, aby maximalizovala zisk a minimalizovala ztrátu.

## VLP - příklad, matematický model

Označme  $x_1, \dots, x_4$  proměnné vyjadřující počty nakoupených kompletů.  
Kriteriální funkce tedy jsou

$$z_1 = 300x_1 + 200x_2 + 170x_3 + 250x_4 \rightarrow \max$$

$$z_2 = 10x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 5x_4 \rightarrow \min$$

Při pořizovací ceně kompletů 10 000 Kč budou mít omezení následující podobu: celkem lze koupit maximálně 100 ks kompletů, z toho nejméně 20 ks musí být snowboardové komplety:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 100$$

$$x_4 \geq 20$$

Dále musíme přidat obligátní podmínky :

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Správně bychom měli přidat ještě podmínky celočíselnosti, ale nebudeme pro zjednodušení zatím uvažovat.

Řešením zjednodušených úloh modelu, kdy uvažujeme vždy pouze jednu kriteriální funkci dostaneme **dílčí optimální řešení**.

## VLP - dílčí optimální řešení, příklad

Snadno lze zjistit, že **minimálního rizika** půjčovna dosáhne, jestliže nakoupí pouze požadované snowboardové komplety, tj. 20 ks po 10 000 Kč a ostatní komplety nebude kupovat vůbec.

Podobně **maximálního zisku** půjčovna dosáhne, jestliže po zakoupení požadovaného množství snowboardových kompletů (tj. 20 ks) utratí všechny zbývající peníze za nejziskovější sjezdové komplety pro dospělé. Prostředky postačí pro zakoupení 80 ks těchto kompletů.

Dílčí optimální řešení můžeme znázornit v **kriteriální tabulce:**

	Kriteriální funkce	
	výnos	riziko
80 dospělých sjezdových + 20 snowboardových	29000	880
20 snowboardových	5000	100

Z hlavní diagonály tabulky vidíme, že ideální řešení je ohodnoceno kriteriálními hodnotami zisku a rizika 29000 a 100, ale reálně neexistuje.

## VLP - lexikografická metoda

Popišme si některé z metod s apriorní preferenční informací. Při použití **lexikografické** metody rozhodovatel určí pořadí významnosti kriteriálních funkcí (předpokládejme, že již jsou funkce označeny tak, že  $z_1$  je nejdůležitější a  $z_k$  nejméně významné, jejich optimální hodnoty označme  $z_1^{opt}, \dots, z_k^{opt}$ ). Hledání kompromisního řešení spočívá v postupném řešení sekvence optimalizačních úloh

$max. z_1 = \mathbf{c}^1 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ . Pokud má úloha více optimálních řešení, řešíme další úlohu:

$max. z_2 = \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^{opt}$ . Opět je-li řešení více, postupujeme dále, až nalezneme kompromisní řešení jako bod optima úlohy

$max. z_k = \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^{opt}, \dots, \mathbf{c}^{k-1} \mathbf{x} \geq z_{k-1}^{opt}$ .

Zmírnit předpoklad, že jednotlivé úlohy mají více než jedno řešení, je možné připuštěním odchylky  $\delta_i$ , o kterou se můžou v jednotlivých krocích lišit hodnoty preferovaných účelových funkcí od svých optim. Například v druhém kroku bychom řešili úlohu

$max. z_2 = \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^{opt} - \delta_1$ , atd.

Popsaná metoda v podstatě kopíruje reálné uvažování manažerů.

## VLP - lexikografická metoda, příklad

Již víme, že při preferenci rizika je nejvýhodnější nakoupit pouze 20 snowboardových kompletů a při preferenci zisku 20 snowboardových a 80 dospělých sjezdových kompletů.

Jaké by měla úloha řešení, jestliže budeme preferovat riziko, ale připustíme jeho odchylku z ideální hodnoty 100 na 120? Maximalizujeme tedy zisk

$$z_1 = 300x_1 + 200x_2 + 170x_3 + 250x_4 \text{ za omezení}$$

$z_2 = 10x_1 + 15x_2 + 25x_3 + 5x_4 \leq 120$ , (tj. že riziko nepřesáhne hodnotu 120) a dalších omezení modelu

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 100 \quad x_4 \geq 20, \quad x_1, \dots, x_4 \geq 0.$$

Snadno vypočteme optimální řešení  $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 20$ , tedy k požadovaným dvaceti snowboardovým přikoupíme ještě 2 dospělé sjezdové komplety. Získáme tak **5600 Kč** a riziko bude rovno limitním **120 bodům**.



## VLP - metoda minimální komponenty

Jiným přístupem je stanovení kompromisního řešení podle **minimální komponenty**, kdy maximalizujeme nejmenší, tedy nejhorší komponentu vektoru hodnot účelových funkcí. Dostaneme tedy úlohu LP maximalizovat

$z = \delta$  za podmínek  $\mathbf{c}^1 \cdot \mathbf{x} \geq \delta, \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x} \geq \delta, \dots, \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{x} \geq \delta, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ .

Pokud mají kritéria rozdílnou povahu, je třeba je nejprve převést všechna na maximalizační a upravit na bezrozměrné, aby byla zajištěna jejich srovnatelnost.

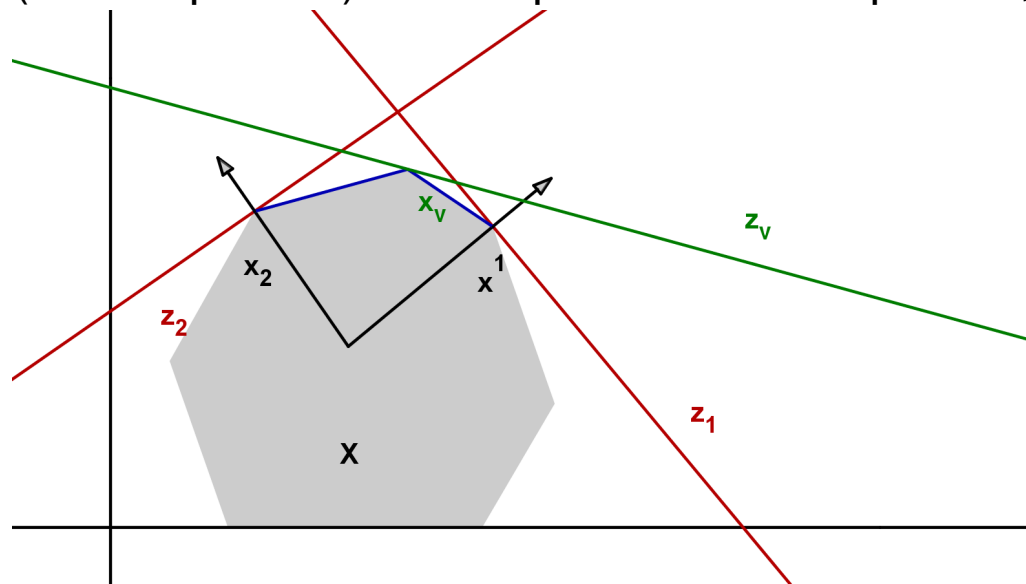
## VLP - metoda agregace kriteriálních funkcí

Pomocí vhodně zvoleného operátoru je možné sloučit všechny kriteriální funkce do jediné. Obecně se při agregaci používají různé operátory, zde se jeví nejvhodnější lineární kombinace jednotlivých funkcí za použití normovaného vektoru vah  $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ . Místo původní optimalizační úlohy

$\mathbf{z} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{MAX}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$  řešíme jednorozměrnou úlohu

$z_v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{max}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$

Pozor! Při nastavení vektoru vah je třeba vzít v úvahu, že hodnoty funkcí se pohybují na různých škálách. Vyznačme agregované kritérium graficky (zelená přímka). Nemá praktickou interpretaci, je pouze kritériem pomocným.



## VLP - metoda agragace, příklad

Při agregaci funkce zisku  $z_1$  a funkce rizika  $z_2$  je třeba vzít v úvahu odlišnou povahu kritérií, například můžeme vynásobit  $z_2$  koeficientem (-1).

Jestliže nastavíme vektor vah

$$\mathbf{v} = \left( \frac{5}{100}, \frac{95}{100} \right),$$

pak agregovaná účelová funkce bude mít tvar

$$z_v = 5,5x_1 - 4,25x_2 - 15,25x_3 + 7,75x_4.$$

Snadno nahlédneme, že optimální řešení tedy bude

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 100$ , všechny peníze utratíme za snowboardové komplety. Optimální hodnota účelové funkce  $z_v = 775$ , což nemá žádnou vypovídací schopnost, ale můžeme pro nalezené řešení dopočítat hodnotu zisku 25000 Kč a hodnotu rizika 500 bodů.

## VLP - převod kritériálních funkcí na omezení

Při **postupném** převodu kritérií na omezení postupujeme podobně jako u lexikografické metody. Předpokládáme opět, že jsou funkce označeny od nejdůležitějšího po nejméně významné). Hledání kompromisního řešení spočívá v postupném řešení sekvence optimalizačních úloh

$max. z_1 = \mathbf{c}^1 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}.$  Optimální hodnotu označíme  $z_1^*$  a řešíme další úlohu, kde připustíme určitou odchylku od  $z_1^*$ :

$max. z_2 = \mathbf{c}^2 \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^* - \delta_1.$  Opět zjistíme  $z_2^*$  a postupujeme dále, až nalezneme kompromisní řešení jako bod optima úlohy

$max. z_k = \mathbf{c}^k \cdot \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \mathbf{c}^1 \mathbf{x} \geq z_1^* - \delta_1, \dots, \mathbf{c}^{k-1} \mathbf{x} \geq z_{k-1}^* - \delta_k.$

Kritéria lze také převést na omezení **najednou** tak, že maximalizujeme pouze nejdůležitější kritérium  $z_1$  a přidáme do modelu současně všechna omezení  $z_i \geq au_i, i = 2, \dots, k$  (aspirační úrovně všech kritérií  $au_i, i = 2, \dots, k$  nastavíme někam mezi bazální a ideální hodnotu pro dané kritérium  $\langle z_i^{min}, z_i^{max} \rangle$ .) Nevýhodou tohoto přístupu je, že může být obtížné nastavení aspiračních úrovní, aby nebyla přípustná množina prázdná nebo aby nebyl vliv kritérií eliminován úplně.

## Literatura

- ▶ Fletcher, Roger: Practical methods of optimization, 1st ed., Chichester : John Wiley and Sons, 1987.
- ▶ Šubrt, Tomáš a kol.: Ekonomicko-matematické metody, Plzeň : Vydavatelství a nakladatelství Aleš Čeněk, 2011
- ▶ Pánková, Václava: Nelineární optimalizace pro ekonomy, 1. vyd., Praha : Professional Publishing, 2003
- ▶ Intriligator, Michael D.: Mathematical optimization and economic theory, Philadelphia : Siam, 2002
- ▶ Jablonský, Josef, Petr Fiala, Miroslav Maňas: Vícekriteriální rozhodování, 1. vyd., Praha : Vysoká škola ekonomická v Praze, 1994.
- ▶ Klapka, Jindřich, Jiří Dvořák, Pavel Popela Metody operačního výzkumu, Vyd. 2., Brno : VUTIUM, 2001
- ▶ Klein, Michael W.: Mathematical methods for economics, 2nd ed., Boston : Addison-Wesley, c2002
- ▶ JABLONSKÝ, Josef: Operační výzkum : kvantitativní modely pro ekonomické rozhodování, 1. vyd. Praha: Professional Publishing, 2002
- ▶ PLEVNÝ, Miroslav a Miroslav ŽIŽKA: Modelování a optimalizace v manažerském rozhodování, Vyd. 2. Plzeň: Západočeská univerzita, 2010
- ▶ GROS, Ivan: Kvantitativní metody v manažerském rozhodování, 1. vyd. Praha: Grada, 2003
- ▶ Jana Friebelová - Jana Klicnarová: Rozhodovací modely pro ekonomy, 1. vyd. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007