Úvod

Představovat se nebudu, asi mě znáte...

Jak jsem sliboval, tak tento dokument vzniknul (vzniká) jako moje snaha Vám ulehčit práci vynaloženou na naučení se potřebné látky. V těchto textech se budu snažit vysvětlovat „Matematiku s lidskou tváří“. Nemá to nahradit studijní text, nebo můj výklad, stále věřím, že ústní formou toho předám nejvíc (nejenom virových a bakteriálních zárodků).

Co v toto textu naleznete? No nebude toho moc, ale snad ani málo. Plánuju zde shrnout základní teorii a odkud se to vzalo (tadle pasáž bude nejspíš i s obrázky, pokud to půjde), nebojte tuto pasáž vyznačím aby se dala přeskočit. Následovat budou potřebné vzorce, několik vzorově řešených příkladů a pro odvážlivce i několik neřešených.

Budu rád za libovolnou zpětnou vazbu, hlavně negativní ať mám podněty na zlepšení, třeba bych z toho pak byl schopnej vykouzlit i nějaký ten plus bod ;-) (ale radši nic neslibuju)

Derivace

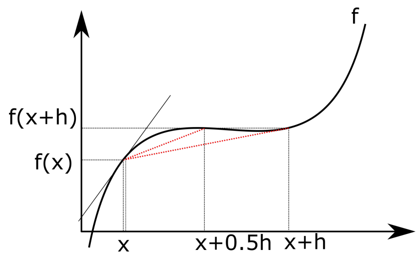
Jak jsem strašil tak tu bude i trocha teorie, ale číst to nemusíte

Pokusím se Vám tady vysvětlit pár otázek, které jste si možná položili:

- **Co je vlastně derivace?**

Derivace je „speciální“ limitou dané funkce $f(x)$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$



- **To mi bylo platný jak mrtvýmu zimník, nešlo by to říct jinak?**

To byla matematická definice, uznávám, že k moc věcem není ...
Jak je na obrázku vidět, tak jak se vzdálenost h zmenšuje, tím přesněji červené tečkované úsečky (sečny) popisují sklon funkce f v bodě x až nakonec přejdou v černou přímku (tečnu).

- **Takže to vyjadřuje tečnu k funkci?**

Ne tak docela, obrázek je názorný, leč lehce nepřesný. Derivace funkce neudává přímo tečnu, ale pouze její směrnici. Určitě si vzpomenete na směrnicový zápis přímky $y = kx + q$, kde právě k je směrnice přímky. Rovnici tečny v bodě a dostanete $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$, ale k tomu se dostaneme později.

- **Co mi derivace řekne o mé funkci?**

Hodnota derivace (číslo které dostanete, když do derivace dosadíte konkrétní hodnotu na ose x) Vám řekne, jak moc „rychle“ se funkce v okolí bodu x mění. Když je tato hodnota kladná tak funkce roste, pokud je záporná tak klesá a když je nulová tak funkce „stagnuje“.

Derivační pravidla a vzorce

Tady bych pro Vás měl radu, sežeňte si čtvrtku (nebo nějaký jiný tvrdší papír) formátu A4. Nahoru napíšete „Derivace“ a do dvou sloupečků si postupně pod sebe opište derivační vzorce a obecná pravidla. Udělejte si z toho pak záložku tak cca 11 cm širokou (nebo takovou aby se Vám tam ty vzorce vešly a šlo to založit do formátu vašeho sešitu, myslím, že derivovat po Vás budou chtít i v jiných předmětech), jednak si tím přepisem ty vzorce trochu zapamatujete a zadruhé je budete mít pořád na očích, nebudete je muset pořád hledat. Bylo by hodně fajn, kdyby šlo na tu záložku psát i z druhé strany, teď přijde spoiler, tam se napíšou Integrační vzorce, konec spoileru.

Obecná pravidla

$(C \cdot f)' = C \cdot f'$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$

Vzorce

$(C)' = 0$

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$

$(\sin(x))' = \cos(x)$

$(\cos(x))' = -\sin(x)$

$(\mathrm{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$(\mathrm{cotg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$

$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\mathrm{arctg}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arccotg}(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$

Řešené příklady

Součet

$\left(\sin(x) + 5x^6\right)' = (\sin(x))' + \left(5x^6\right)' = \cos(x) + 5 \cdot 6x^5$

Součin

$(\log_3(x) \cdot \sin(x))' = (\log_3(x))' \cdot \sin(x) + \log_3(x) \cdot (\sin(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(3)} \sin(x) + \log_3(x) \cdot \cos(x)$

Podíl

$$\frac{3x^{\frac{1}{2}} + e^x}{\cos(x) + \mathrm{arctg}(x)} = \frac{\left(3x^{\frac{1}{2}} + e^x\right)' \cdot (\cos(x) + \mathrm{arctg}(x)) - \left(3x^{\frac{1}{2}} + e^x\right) \cdot (\cos(x) + \mathrm{arctg}(x))'}{(\cos(x) + \mathrm{arctg}(x))^2} =$$

$$= \frac{\left(3 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + e^x\right) \cdot (\cos(x) + \mathrm{arctg}(x)) - \left(3x^{\frac{1}{2}} + e^x\right) \cdot \left(-\sin(x) + \frac{1}{1+x^2}\right)}{(\cos(x) + \mathrm{arctg}(x))^2}$$

Složená funkce

$$\left(\mathrm{arctg}\left(x^3 e^{3x^3}\right)\right)' = \frac{1}{1 + \left(x^3 e^{3x^3}\right)^2} \cdot \left(x^3 e^{3x^3}\right)' = \frac{1}{1 + \left(x^3 e^{3x^3}\right)^2} \cdot \left(\left(x^3\right)' \cdot e^{3x^3} + x^3 \cdot \left(e^{3x^3}\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(x^3 e^{3x^3}\right)^2} \cdot \left(3x^2 \cdot e^{3x^3} + x^3 \cdot e^{3x^3} \cdot \left(3x^3\right)'\right) = \frac{1}{1 + \left(x^3 e^{3x^3}\right)^2} \cdot \left(3x^2 \cdot e^{3x^3} + x^3 \cdot e^{3x^3} \cdot \left(3 \cdot 3x^2\right)\right)$$

Složitější funkce bez postupu

$$\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt[2]{1 + \sqrt[4]{1 + e^{3x \cdot \sin(3x+1)}}}}\right)' =$$

$$= \tfrac{1}{3}\left(1 + \sqrt[2]{1 + \sqrt[4]{1 + e^{3x \cdot \sin(3x+1)}}}\right)^{-\frac{2}{3}} \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt[4]{1 + e^{3x \cdot \sin(3x+1)}}\right)^{-\frac{1}{2}} \tfrac{1}{4}\left(1 + e^{3x \cdot \sin(3x+1)}\right)^{-\frac{3}{4}} e^{3x \cdot \sin(3x+1)}.$$

$$\cdot \left(3\sin(3x+1) + 3x\cos(3x+1)\,3\right)$$

$$\left(\mathrm{arctg}\left(e^{\pi^5} + \sqrt[7]{\log_{\frac{5}{6}}\left(10e - \pi^{\frac{7}{e}}\right)\pi^{\sqrt[e]{1+\ln 3+\pi^e}+23}}\right)\right)' = 0$$

Diferenciál

Diferenciálů je celá řada od těch v autě (to je to zařízení co zajistí, že kola u auta se v zatáčkách točí různou rychlostí) až po ty matematické. Mezi těmi matematickými mají největší význam zejména ty prvního řádu, ale existují i diferenciály vyšších řádů. Z praktického hlediska začneme diferenciály prvního řádu (ne fakt do toho netahám SW 7).

Diferenciál prvního řádu

Tady budu asi trochu rozpolcenější a těch nudných oválů tu bude trochu víc (ale menších).

Asi jste se s tím příkladem už setkali, dostali jste zadanou funkci f, nějaký bod x který měl ještě tak divný číslo jako třeba 1,001 a slovní zadání to taky nevytrhlo: „Spočtěte přibližnou hodnotu funkce f v bodě x". Jako by toho nebylo málo je u toho vzorec $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$.

Asi Vás hned napadlo: **„Proč to jako nedosadím do kalkulačky a hotovo?"**
Na to je jednoduchá odpověď: Protože proto... Ne k tomu se nesnížím. V první řadě si musíte uvědomit, že se neučíte vůbec nic nového, pro některé z Vás asi ano, ale z pohledu vědy opravdu ne. Základy diferenciálního počtu položil Anglický vědec Isaac Newton (asi jste o něm už slyšeli, to je ten člověk s jablkem a nejspíš i bolestí hlavy) kolem roku 1665. Shodou okolností v době morové rány, takže měl nejspíš dost klidu na práci. Bylo mu necelých 23 let. Takže o nějaké kalkulačce se mu mohlo leda tak zdát.

K výše zmíněnému vzorci existuje smysluplnější alternativa $\mathrm{d}f = f'(x_0)(x - x_0)$. Funkci známe, x také jediné co nevíme je x_0. Jak tendle bod určit? Nejčastěji to bývá nejbližší celočíselná hodnota k bodu x, ale obecnější pravidlo je: „Je to ta nejbližší hodnota k x ve které jsem schopný přesně spočítat funkční hodnotu bez kalkulačky."

Řešený příklad

Spočtěte přibližnou hodnotu funkce $\ln\left(x^2 + 3x - 3\right)$ v bodě 0,998.
Vím že: $f(x) = \ln\left(x^2 + 3x - 3\right)$ a $x = 0,998$. Zbývá mi určit x_0. Přesnou hodnotu logaritmu jsem schopen bez kalkulačky určit jen v 1 a mocninách jeho základu. Potřebuji najít bod pro který bude platit, že $x^2 + 3x - 3$ se rovná jedné z výše uvedených možností. Z hodnoty x zkusím „1", $1^2 + 3 * 1 - 3 = 1$ tak máme vyhráno $x_0 = 1$.

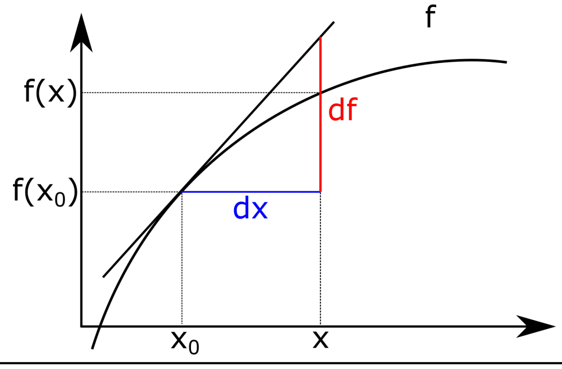
$f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x - 3} \cdot (2x + 3)$; $f'(1) = \dfrac{1}{1^2 + 3 \cdot 1 - 3} \cdot (2 \cdot 1 + 3) = 5$

$\mathrm{d}f = f'(1)(0,998 - 1) = 5(-0,002) = -0,01$
Teď když známe hodnotu diferenciálu, tak nám zbývá jen určit přibližnou funkční hodnotu $f(x)$. K tomu slouží následující vzorec

$$f(x) \approx f(x_0) + \mathrm{d}f$$

Protože jsme volili x_0 tak aby se argument (vnitřek) logaritmu rovnal 1. Víme, že $\ln(1) = 0$. Dosazením do vzorce dostáváme, že přibližná hodnota $f(0,998)$ je $-0,01$. To je Výsledek našeho příkladu.

Pozornějším z Vás už asi došlo, co ten diferenciál vlastně je. Ano, vracíme se zpátky k tečně funkce $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$, pokud změníme označení bodu a za x_0 dostaneme $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = \mathrm{d}f + f(x_0)$ a když bod x_0 nebude moc daleko od bodu x tak si můžeme být jistí, že se nedopustíme velké chyby, když hodnotu funkce nahradíme hodnotou její tečny.



Diferenciály vyšších řádů

Tady to bude hodně rychlý, bude tu jen vzorec, protože diferenciály vyšších řádů se sami o sobě moc nepoužívají, ale jejich zavedení mi usnadní práci v další kapitole.
Diferenciál n-tého řádu je dán vztahem

$$\mathrm{d}^n f = f^{(n)}\left(x_0\right) \cdot \left(\mathrm{d}x\right)^n = f^{(n)}\left(x_0\right) \cdot \left(x - x_0\right)^n$$

kde $f^{(n)}\left(x_0\right)$ je hodnota n-té derivace funkce f v bodě x_0.

Taylorův polynom

Tady to bude taky poměrně krátké, protože všechno „potřebné“ už víte jen se to trochu zobecní. Co když mi nestačí přesnost se kterou odhadnu funkční hodnotu funkce v bodě x? Nešlo by to odhadnout přesněji, nejlépe pomocí mocninné funkce? Tak přesně k tomu je Taylorův polynom $T_n\left(x\right)$.

Polynom stupně n je funkce ve tvaru

$$p_n\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall i = 0, \ldots n$ jsou reálné konstanty s podmínkou, že $a_n \neq 0$. (matematici mají takovéto funkce rádi, protože jdou spočítat jednoduše).

Taylorův polynom je dán následujícím vztahem

$$T_n\left(x\right) = f\left(x_0\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}^i f}{i!} = f\left(x_0\right) + \frac{f^{(1)}\left(x_0\right)}{1!}\left(x - x_0\right) + \frac{f^{(2)}\left(x_0\right)}{2!}\left(x - x_0\right)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x - x_0\right)^n$$

kde x_0 je zadaná hodnota a nazývá se střed Taylorova polynomu.

V tuto chvíli jste si asi uvědomili: „Co když mi ale vyjde poslední derivace 0, to přeci nebude mít Taylorův polynom správný stupeň?“ Nebojte Existuje matematická definice, která na toto pamatuje: **„Taylorův polynom stupně n je polynomem nejvýše stupně n.“** Takže Taylorův polynom stupně 3 může být klidně polynom stupně 1, pokud vám v jeho středu vyjde druhá i třetí derivace rovna 0. nejlepší bude asi názorný příklad bez postupu.

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin(x) & f(x) = \cos(x); \quad x_0 = 0 \\
T_1(x) = x & T_1(x) = 1 \\
T_2(x) = x & T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \\
T_3(x) = x - \frac{x^3}{6} & T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \\
T_4(x) = x - \frac{x^3}{6} & T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}
\end{array}$$

Dobré je si také všimnout, že v Taylorových polynomech těchto funkcí vystupují pouze sudé (párné), nebo liché (nepárné) mocniny. Je to náhoda, že se tedy asi ty funkce nazývají sudé/liché?

Řešený příklad

Určete Taylorův polynom třetího stupně funkce $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 1}$ se středem v 1.

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sqrt{x^2 + x - 1}; & f(x_0) = \sqrt{1^2 + 1 - 1} = 1 \\
f'(x) = \ldots = \dfrac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 1}}; & f'(x_0) = \dfrac{3}{2} \\
f''(x) = \ldots = \dfrac{-5}{4\left(x^2 + x - 1\right)^{\frac{3}{2}}}; & f''(x_0) = -\dfrac{5}{4} \\
f'''(x) = \ldots = \dfrac{30x + 15}{8\left(x^2 + x - 1\right)^{\frac{5}{2}}}; & f'''(x_0) = \dfrac{45}{8}
\end{array}$$

Tedy pokud jsem tam někde neudělal chybu pak výsledek je

$$T_3\left(x\right) = 1 + \frac{3}{2}\left(x - 1\right) - \frac{5}{8}\left(x - 1\right)^2 + \frac{45}{48}\left(x - 1\right)^3$$

Vyšetření průběhu funkce jedné proměnné

Tato část bude asi jedna z těch náročnějších. Už jen to slovo „Vyšetření“ by mělo mluvit samo za sebe. Je to jako detektivka dostanete nějaký „tajemný“ vzorec a postupně sbíráte střípky skládačky (o kterých i často doufáte, že jsou správné) a na konci z nich si musíte poskládat celkový obrázek a „usvědčit vraha“. A jediné co se k tomu může použít je derivování, nulové body a pár (ne nutně jen dvě) limit.

Tak se pusťme do výpisu jednotlivých dílků, které je dobré odhalit:

- **1) Definiční obor**
- **2) Sudost/Lichost (Párnost/Nepárnost) funkce**
- **3) Monotónnost funkce**
- **4) Určení lokálních extrémů funkce**
- **5) Konvexnost/Konkávnost funkce**
- **6) Limity funkce**
- **7) Asymptoty funkce**
- (**8) Namalovat obrázek**)

Asi bude nejlepší, než o tom jen mluvit, si to rovnou ukázat na řešeném příkladu.

Řešený příklad

Vyšetřete průběh funkce:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2}$$

1) Definiční obor

Tady asi není co řešit, todle už většina z Vás někdy dělala co se nesmí:

- dělit 0 (ani v exponentech)
- počítat sudá (párná) odmocnina ze záporných čísel
- počítat logaritmus z nekladného čísla $(-\infty, 0\rangle$

Teď několik rad na co si dát pozor. Poznačit si „díry“ v definičním oboru, „dírou“ myslím izolované body kde funkce není definovaná, nejčastěji vzniklé dělením 0.
Dát si pozor na úpravu funkce. Příklad $\ln\left(x^2\right)$, většinu z Vás by napadlo tuto funkci upravit na $2\ln(x)$ a měli by to správně, ale co se stalo s definičním oborem?

V našem případě není žádný problém: nedělíme 0, počítáme lichou odmocninu a logaritmy to ani nevidělo. Proto

$$Df = \mathbb{R}$$

2) Sudost/Lichost funkce

Často velmi opomíjená vlastnost, což je velká škoda, protože když to „klapne“ tak to ušetří spoustu práce.

Funkce $\mathbf{f(x)}$ je sudá (lichá), pokud pro $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{Df}$ platí $\mathbf{f(-x) = f(x)}$ $\mathbf{(f(-x) = -f(x))}$.

Co to ulehčí? No vyřeší to půlku práce!
Pokud byla funkce sudá, tak je symetrická podél osy y, neboli „Co je vpravo musí být i vlevo“. A pokud je lichá tak je středově symetrická podle počátku.

Pro naši funkci platí

$$f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^3 + (-x)^2} = \sqrt[3]{-x^3 + x^2}$$

a to k naší velké škodě nesplňuje ani jedno, ani druhé :'-(

3) Monotónnost funkce

Jinak řečeno: „Kdy funkce roste a kdy klesá". To se nejlépe určí pomocí první derivace a nulových bodů.

Co dodat? Snad jen to, že funkce roste když $f'(x) > 0$ a klesá když $f'(x) < 0$. Body kde platí $f'(x) = 0$ nazveme **stacionárními body**, ale o nich až později.

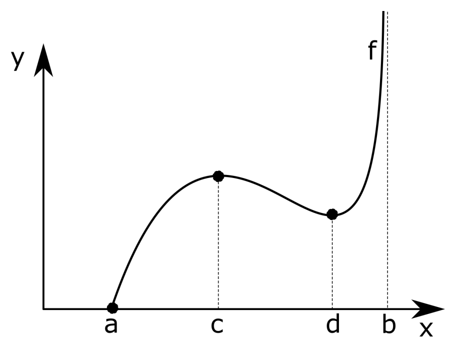
$f'(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{3\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2}} = \dfrac{x\,(3x + 2)}{3\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2}}$ a hurá na nulové body, jediné členy, které ovlivní znaménko první derivace jsou ty v čitateli (protože ve jmenovateli je vnitřek odmocniny na druhou).

Člen	$\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$	$(0, \infty)$
x	-	-	+
$3x + 2$	-	+	+
	+	-	+
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Co je dobré si všimnout je, že některé funkce (jako ta naše) mají „menší" definiční obor derivace než původní funkce. **Co se v těch bodech děje?** No většinou tam funkce „nekonečně rychle" roste, nebo klesá (její tečna v daném bodě nejde napsat ve tvaru $y = kx + q$, ale jen ve tvaru $x = C$, kde C je reálná konstanta). Případně tam je „hrot" (tečna zprava by nebyla stejná jako tečna zleva) nebo kombinace obojího.

4) Určení lokálních extrémů funkce

Asi víte co je „extrém", ale v matematice máme dva typy extrémů, lokální a globální (taky by jste to mohli najít jako absolutní, ale to označení se mi vůbec nelíbí). Protože obrázek dá za 1000 slov ...



Funkce $f(x)$ je definovaná pro $\forall x \in \langle a, b)$. Černými tečkami jsou označeny extrémy funkce. Je zřejmé, že v bodech a a d jsou lokální minima (bod a je rovněž globálním minimem) a v bodě c je lokální maximum. Globální maximum funkce f nemá, protože není ohraničená z hora (ke každému bodu najdete další, který má vyšší funkční hodnotu). A teď konečně k definici:

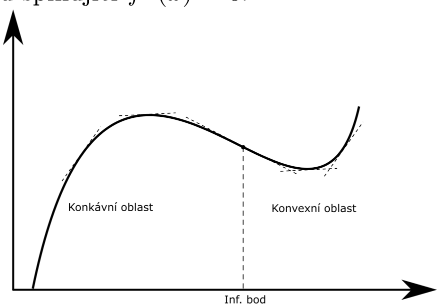
„Bod a definičního oboru funkce f nazveme lokálním maximem (minimem) pokud existuje O(a) okolí bodu a pro které platí f(a) $>$ ($<$) f(x), $\forall$x $\in$ O(a)."

No a globální maximum ne největší lokální extrém a globální minimum je nejmenší lokální maximum. Jak jste si už asi všimli, tak první derivace s definicí extrému nemá nic společného (natož druhá). Ale je dost užitečná: **„Pokud do nějakého bodu definičního oboru funkce roste a za ním klesá, pak se v tomto bodě nachází lokální maximum."** Pro minimum to je naopak, v ostatních případech tam bývají inflexní body, ale o nich až později.

Z monotonosti naší funkce víme, že lokální maximum je v bodě $-\frac{2}{3}$ a lokální minimum je v bodě 0. Někdo by mohl vyžadovat funkční hodnoty v těchto bodech, ale podle mě nejsou úplně nezbytné, proto je nechám čistě na Vás. (Robustní rada, spočítejte je vždycky času to nezabere mnoho a může to zachránit body zdarma.)

5) Konvexnost/Konkávnost funkce

Tady budu stručný, funkce je konvexní (funkce „leží nad tečnou“) na intervalu splňujícím $f''(x) > 0$ a konkávní () na intervalu splňujícím $f''(x) < 0$ (funkce „leží pod tečnou“). Inflexním bodem nazveme bod splňující $f''(x) = 0$.



$$f''(x) = \left(\frac{3x^2+2x}{3\sqrt[3]{(x^3+x^2)^2}}\right)' = \cdots = -\frac{2x^2}{9\sqrt[3]{(x^3+x^2)^5}} = -\frac{2x^2}{9\sqrt[3]{(x^2(x+1))^5}}$$ a hurá na nulové body, jediné členy, které ovlivní znaménko první derivace jsou $(x+1)$ a mínus před zlomkem.

Člen	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$x+1$	-	+
-	-	-
	+	-
	$\smile$	$\frown$

6) Limity funkce

Nechť jsem stručný. Spočítáte limity pro „kraje“ definičního oboru a limity pro dříve zmíněné „díry“ v definičním oboru (pro díry je možné, že limita nebude existovat, tak spočítejte i jednostranné limity jako v případě $\mathbf{\frac{1}{x}}$).

Definiční obor naší funkce, nemá „díry“, tak stačí spočítat jen limity ke „krajům“.

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} = \left[\sqrt[3]{-\infty+\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3+x^2} = \infty$$

7) Asymptoty funkce

Asymptoty neboli „tečny v nekonečnu“. Existují tři druhy asymptot:

- Asymptoty bez směrnice
- Asymptoty se směrnicí (které dáme dělíme na)
  - Asymptoty s nulovou směrnicí
  - Asymptoty s nenulovou směrnicí

Teď se zaměříme na to, kde máme kterou asymptotu hledat a jaké mají rovnice.

Zpět

Asymptoty bez směrnice
Jsou v „dírách“ definičního oboru, kde Vám alespoň jedna jednostranná limita vyšla $\pm\infty$.

$$x = a$$

Je rovnice asymptoty bez směrnice, kde a je „díra“ v def. oboru.

Asymptoty se směrnicí
Jsou už opravdu „tečny v nekonečnu“ a každá funkce může mít maximálně 2 asymptoty se směrnicí (v některých případech ale splývají).

$$y_{-\infty} = k_{-\infty}x + q_{-\infty}$$

Je rovnice asymptoty pro $-\infty$ a analogicky pro ∞

$$y_{\infty} = k_{\infty}x + q_{\infty}$$

Teď obecný postup jak určit existenci limity s nulovou směrnicí.

Asymptoty s nulovou směrnicí
Asymptota s nulovou směrnicí existuje pokud Vám vyjdou konečné (ne nekonečné) limity $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = C$ (každá zvlášť), kde C je reálná konstanta. Pak příslušná asymptota má rovnici

$$y_{\pm\infty} = C$$

Shrnuto, pokud Vám vyjde konečná limita funkce pro $-\infty$ nebo ∞, pak na existuje odpovídající asymptota s nulovou směrnicí. Např e^{-x} má asymptotu s nulovou směrnicí $y_\infty = 0$.

Asymptoty s nenulovou směrnicí
Tak a je to tady nejtěžší asymptoty...
Když Vám vyjde limita v nekonečnu (mínus nekonečnu), nekonečná ($\pm$) pak máme oprávněné podezření na existenci asymptoty s nenulovou směrnicí na odpovídající straně.
Tak jak to určit? No podle toho jak nám vyjde směrnice :-)

$$k_{\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = C_{\pm\infty}$$

Pokud C vyjde nenulové a zároveň ne nekonečno, pak tato asymptota existuje a potřebujeme určit už jen její posun q

$$q_{\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - k_{\pm\infty}x)$$

Uf ... už to máme za sebou.

k příkladu ... protože v definičním oboru nemáme „díru“, tak můžeme s jistotou říct, že funkce nemá asymptotu bez směrnice a protože nám limity v $\pm\infty$ nekonečné, tak nemá ani asymptoty s nulovou směrnicí. Nezbývá nám než určit zkusit vypočítat směrnice

$$k_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}{x} = 1$$

pro ∞ to vyjde úplně stejně. Teď když víme, že směrnice je 1 (není 0 ani nekonečná) tak asymptoty existují. Nezbývá než určit posuny q.

$$q_{\pm\infty} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2} - 1x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1\right)\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - 1}{x^{-1}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(-x^{-2}\right)}{-x^{-2}} = \frac{1}{3}$$

tak asymptotu máme a je jen jedna

$$y = x + \frac{1}{3}$$

a obrázek za odměnu