1 Úvod

Velmi záhy zjistíte, že to je vlastně úplně stejný jako funkce jedné proměnné. Pro zapojení prostorové představivosti, do teď jste se na všechny funkce koukali jak Egypťani z profilu, teď je začnete sledovat v perspektivě.
Funkce dvou proměnných už nedefinuje „čáru“, ale plochu. Jak si to představit no nejlépe jako zprohýbaný kus plechu na který se koukáte z hora vyberete si bod o souřadnicích $[x, y]$ a „plech“ (naše funkce) Vám řekne jak jste vysoko.

Definiční obor

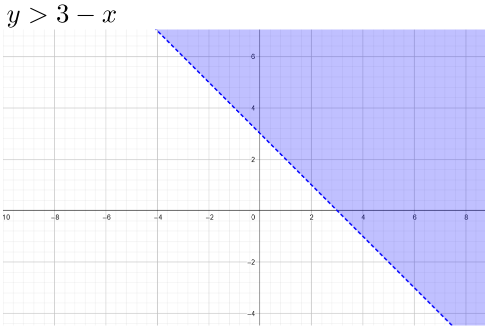
Pro definiční obor funkce dvou (a více) proměnných neplatí nic nového. Pořád se nesmí:

- dělit nulou
- počítat sudé odmocniny ze záporných čísel
- počítat logaritmy z nekladných čísel

Hlavní rozdíl je ale v tom, že každá výše uvedená nerovnost je definována nějakou křivkou, která dělí rovinu xy na dvě části. Jednu, která výše uvedené podmínky splňuje a druhou, která nikoli. Průnikem všech oblastí, které splňují podmínky dostanete definiční obor funkce. A to už je nejlepší namalovat.

Řešený příklad 1

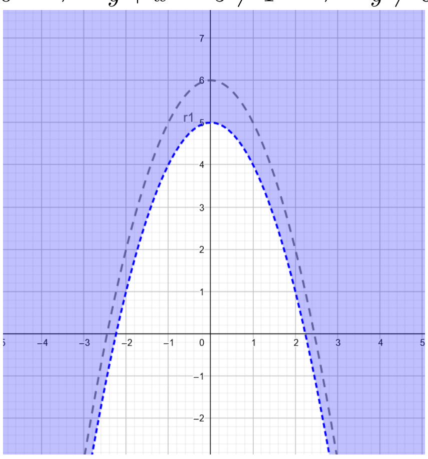
$f(x, y) = \ln(x + y - 3)$
podmínka: $x + y - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad y > 3 - x$



Řešený příklad 2

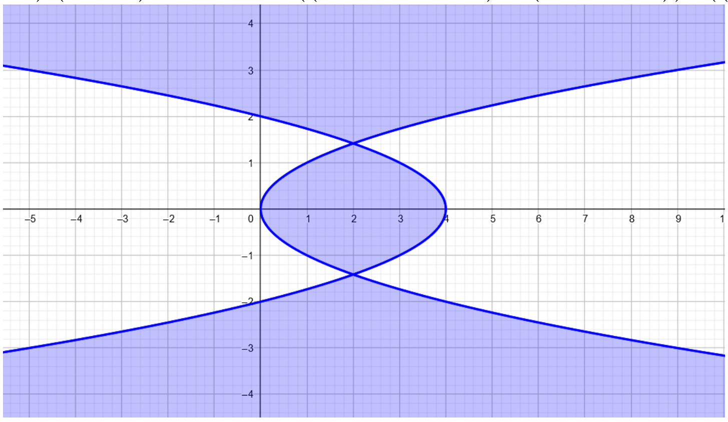
$$f(x, y) = \frac{3x + y}{\log_3(y + x^2 - 5)}$$

podmínka 1: $y + x^2 - 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad y > 5 - x^2$
podmínka 2: $\log_3(y + x^2 - 5) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y + x^2 - 5 \neq 1 \quad \Rightarrow \quad y \neq 6 - x^2$



Řešený příklad 3

$f(x,y) = \sqrt{(x+y^2-4)(x-y^2)}$
podmínka: $(x+y^2-4)(x-y^2) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \left((x+y^2-4 \geq 0) \wedge (x-y^2 \geq 0)\right) \vee \left((x+y^2-4 \leq 0) \wedge (x-y^2 \leq 0)\right)$



2 Parciální derivace

Co

Teď musíme zavést nové značení (protože už si úplně nevystačíme s čárkou)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x$$

je parciální derivace funkce f podle proměnné x. Obdobně to bude u derivace pode y,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y$$

U druhých derivací to bude velmi podobné

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = f''_{xy} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = f''_{yx}$$

ale nebojte nemusíte to u těch smíšených derivací (f''_{xy} a f''_{yx} počítat oboje, tydle derivace vždycky vyjdu stejně :-)

se samotných výpočtů týče, tak je to úplně stejné jako u funkce jedné proměnné, jen když derivujete podle x tak y považujete za konstantu a naopak.

Řešený příklad 1

$f(x,y) = \sin(xy)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(xy)y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(xy)x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin(xy)y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sin(xy)x^2$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = -\sin(xy)xy + \cos(xy) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = -\sin(xy)xy + \cos(xy)$$

Řešený příklad 2

$f(x, y) = \ln(x^3y + xy^2 + 2x + y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y + y^2 + 2}{x^3y + xy^2 + 2x + y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 + 2xy + 2y}{x^3y + xy^2 + 2x + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{6xy\left(x^3y + xy^2 + 2x + y^2\right) - \left(3x^2y + y^2 + 2\right)^2}{\left(x^3y + xy^2 + 2x + y^2\right)^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{(2x + 2)\left(x^3y + xy^2 + 2x + y^2\right) - \left(x^3 + 2xy + 2y\right)^2}{\left(x^3y + xy^2 + 2x + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\left(3x^2 + 2y\right)\left(x^3y + xy^2 + 2x + y^2\right) - \left(3x^2y + y^2 + 2\right)\left(x^3 + 2xy + 2y\right)}{\left(x^3y + xy^2 + 2x + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\left(3x^2 + 2y\right)\left(x^3y + xy^2 + 2x + y^2\right) - \left(x^3 + 2xy + 2y\right)\left(3x^2y + y^2 + 2\right)}{\left(x^3y + xy^2 + 2x + y^2\right)^2}$$

To by asi jako ukázka mohlo stačit :-) (ty smýčený derivace jsem psal obě jen aby jste uvěřili, jedna věc je říct, že to je stejný, něco jinýho to je i ukázat, že to tak OPRAVDU je).

3 Volný extrém funkce dvou proměnných

I tady platí definice obdobná jako u funkce jedné proměnné (definice přes okolí bodu), ale tady si, na rozdíl od funkce jedné proměnné nevystačíme jen s prvními derivacemi.
Jak najdu podezřelé body z lokálního extrému?
Teď začne sranda ... Podobně jako u lokálního extrému funkce jedné proměnné platí, že jistým ukazatelem jsou první derivace. Neboli stacionární bod **A** splňuje podmínky

$$f'_x(\mathbf{A}) = 0 \quad \text{a} \quad f'_y(\mathbf{A}) = 0$$

Postup je, spočítám první parciální derivace a řeším jimi danou, výše uvedenou, soustavu dvou rovnic.
Ale jak rozhodnu o tom, jestli v podezřelém bodě **A** je extrém a případně jeho typ?

Zde přijde do hry takzvané Sylvestrovo rozhodující pravidlo.

V bodě **A** funkce dvou proměnných f, splňujícím $f'_x(\mathbf{A}) = 0$ a $f'_y(\mathbf{A}) = 0$ je
lokální **minimum** pokud platí:

$$f''_{xx}(\mathbf{A}) > 0 \quad \text{a} \quad f''_{xx}(\mathbf{A})f''_{yy}(\mathbf{A}) - \left(f''_{xy}(\mathbf{A})\right)^2 > 0$$

V bodě **A** funkce dvou proměnných f, splňujícím $f'_x(\mathbf{A}) = 0$ a $f'_y(\mathbf{A}) = 0$ je
lokální **maximum** pokud platí:

$$f''_{xx}(\mathbf{A}) < 0 \quad \text{a} \quad f''_{xx}(\mathbf{A})f''_{yy}(\mathbf{A}) - \left(f''_{xy}(\mathbf{A})\right)^2 > 0$$

*Zadefinoval bych Vám to před determinant, ale zatím nevíte co to je :-((možná to z M0 znáte, jen nevíte, že to je determinant :-D)
V ostatních případech se nejedná o extrém (doporučuju si na wiki najít obrázek hyperbolického paraboloidu).