

DRUHÉ CVIČENÍ
POSLOUPNOSTI A ŘADY

PŘÍKLAD 1: Napište první pět členů daných posloupností:

a) $a_n = \frac{n+1}{3n-1},$

b) $a_n = (0,2)^n,$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n!},$

d) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 3.$

Je některá z uvedených posloupností aritmetická nebo geometrická?

PŘÍKLAD 2: Najděte vzorec pro n -tý člen daných posloupností (předpokládejte, že vzor prvních členů pokračuje):

a) $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \right\},$

b) $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots \right\},$

c) $\{2, 7, 12, 17, \dots\},$

d) $\left\{ 1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \dots \right\}.$

Která z daných posloupností je aritmetická nebo geometrická?

PŘÍKLAD 3: Určete součet prvních deseti členů následujících posloupností:

a) $a_n = 3 + 2n,$

b) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n,$

c) $a_n = 3^n,$

d) $a_n = -3n.$

PŘÍKLAD 4: Uložíme-li částku 75 000 Kč při úroku 5 % ročně, jak velkou částku můžeme očekávat na účtu za 5 let? Za jak dlouho se daná částka zdvojnásobí?

PŘÍKLAD 5: Jak velkou částku musíme investovat, abychom za 5 let získali €10 000, je-li roční úroková míra 5 %? A kolik let bude trvat při dané úrokové míře než se investice €1 000 zhodnotí na €2 000?

PŘÍKLAD 6: Autor učebnice si může nechat vyplatit tantiémy dvěma různými způsoby. Buď dostane 21 000 Kč ihned a nebo dostane 4 600 Kč v pěti ročních splátkách, přičemž první dostane okamžitě. Která nabídka je výhodnější, je-li roční úroková míra 6 %?

PŘÍKLAD 7: Schengenský prostor je území 27 států, ve kterém mohou osoby překračovat hranice sdružených států bez hraniční kontroly. Pro rok 2024 označme c_{ij} odhad množství osob, které přejdou hranice z území státu i na území státu j pro každé $i \neq j$. Jaký je význam výrazů $\sum_{j=1}^{27} c_{ij}$ a $\sum_{i=1}^{27} c_{ij}$?

PŘÍKLAD 8: Určete součet následujících řad (pokud je to možné):

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1},$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (1,25)^k,$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (0,1)^k,$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^n - 2^n}{6^n}$

PŘÍKLAD 9: Vláda se rozhodne dát fixní slevu na daních každé domácnosti, přičemž statistici usuzují, že část této slevy se utratí za služby a zboží. Příjemci těchto peněz opět utratí stejnou část této částky za služby a zboží atd. Je pro celkovou velikost ekonomiky výhodnější, když vláda poskytne slevu ve výši 10 000 Kč a příjemci utratí 80 % nebo když bude sleva 5 000 Kč, ale příjemci utratí 90 %?

PŘÍKLAD 10: Ukažte, že dané řady divergují:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$,

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-3}$.

PŘÍKLAD 11: Rozepište následující sumy a vypočtete:

a) $\sum_{s=1}^3 \sum_{r=1}^4 (r + 2s)$,

b) $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 i \cdot 3^j$.

DVĚ BONUSOVÉ ÚLOHY

PŘÍKLAD 12: Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Nápověda: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

PŘÍKLAD 13: Co je špatně na následující úvaze?

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + 0 + 0 + \dots \\ &= (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots \\ &= 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1 \end{aligned}$$