Čtvrté cvičení
Aplikace derivace

Příklad 1: Určete lokální extrémy funkce

a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$,

b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$

c) $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Příklad 2: Určete absolutní extrémy funkce

a) $f(x) = x - x^3$, $x \in [0, 1]$

b) $f(x) = x - \ln x$, $x \in [1, \mathrm{e}]$

Příklad 3: Funkce vyjadřující velikost produkce firmy je dána vztahem

$$Q(L) = 12L^2 - \frac{1}{20}L^3, \qquad L \in [0, 200],$$

kde L je počet pracovníků.

a) Jaká velikost pracovní síly maximalizuje velikost produkce?

b) Velikost produkce na pracovníka je dána vztahem $\frac{Q(L)}{L}$. Kdy je tato veličina největší?

c) Je-li $L^\star$ hodnota, která maximalizuje veličinu $\frac{Q(L)}{L}$ z předchozího bodu, pak můžete ověřit, že platí $Q'(L^\star) = \frac{Q(L^\star)}{L^\star}$. Je to jen náhoda?

Příklad 4: Firma obdrží cenu p za každou jednotku svého výstupu, přičemž platí w za jednu jednotku vstupů. Na nastavení procesu výroby je potřeba pevná částka F. Velikost výstupů při použití x jednotek vstupů je dána funkcí $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Jak vypadá vztah pro příjmy, výdaje a zisk?

b) Určete podmínky, kdy je zisk firmy maximální.

Příklad 5: Ve městě s 10 000 obyvateli je počet N lidí, kteří ví v daném čase t nějakou informaci, roven

$$N(t) = \frac{10000}{1 + 9999\mathrm{e}^{-t}},$$

kde t je čas měřený ve dnech a informace je rozšířena jedinou osobou, která ji měla v čase $t = 0$. Určete, v kterém čase t je rychlost šíření informace největší.

Příklad 6: Určete intervaly, ve kterých je daná funkce konvexní, konkávní a určete inflexní body, pokud existují.

a) $f(x) = 12 - 12x + x^3$,

b) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$