Čtvrté cvičení
Aplikace derivace
Výsledky (bez záruky)

Příklad 1: Určete lokální extrémy funkce

a) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x$, lok. min. $[0, 0]$, $[2, 0]$ a lok. max. $[1, 1]$,

b) $f'(x) = \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2}$, lok. min. $[\sqrt{2} - 1, 2(\sqrt{2} - 1)]$ a lok. max. $[-1 - \sqrt{2}, -2(1 + \sqrt{2})]$,

c) $f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x-1}{x}\right)$, lok. min. $[1, \mathrm{e}]$.

Příklad 2: Určete absolutní extrémy funkce

a) abs. min. $[0, 0]$ a abs. min. $[1, 0]$, abs. max. $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right]$,

b) abs. min. $[1, 1]$, abs. max. $[\mathrm{e}, \mathrm{e} - 1]$.

Příklad 3:

a) $Q'(L) = 24L - \frac{3L^2}{20}$, abs. max. pro $L = 160$, $Q = 102\,400$.

b) $\frac{Q(L)}{L} = 12L - \frac{1}{20}L^2$, $\left(\frac{Q(L)}{L}\right)' = 12 - \frac{1}{10}L$, abs. max pro $L^\star = 120$.

c) Není, jelikož
$$\left(\frac{Q(L)}{L}\right)' = \frac{LQ'(L) - Q(L)}{L^2}.$$
A má-li být tato derivace rovna nula, tak musí platit $Q'(L) = \frac{Q(L)}{L}$.

Příklad 4:

a) $R = p\sqrt{x}$, $C = wx + F$, $P = p\sqrt{x} - wx - F$.

b) $P' = \frac{p}{2\sqrt{x}} - w$, maximální zisk je pro $x = \frac{p^2}{4w^2}$. Hodnota tohoto zisku je $p(x) = \frac{p^2}{4w} - F$. Aby se tedy s výrobou vůbec začalo, tak musí platit $\frac{p^2}{4w} > F$.

Příklad 5: Rychlost šíření zprávy je největší, když je derivace největší. Hledáme tedy maximum první derivace $N' = \frac{10000 \cdot 9999\mathrm{e}^{-t}}{(1+9999\mathrm{e}^{-t})^2}$. Pak $(N')' = \frac{10000 \cdot 9999\mathrm{e}^{-t}(9999\mathrm{e}^{-t}-1)}{(1+9999\mathrm{e}^{-t})^3}$. A odtud $t = \ln 9999 \approx 9{,}21$.

Příklad 6:

a) $f''(x) = 6x$, konvexní na $(0, \infty)$, konkávní na $(-\infty, 0)$, inflexní bod $[0, 0]$,

b) $f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, konvexní na $(-\sqrt{3}, 0)$ a $(\sqrt{3}, \infty)$, konkávní na $(-\infty, -\sqrt{3})$ a $(0, \sqrt{3})$, inflexní body $[-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2]$, $[0, 0]$ a $[\sqrt{3}, \sqrt{3}/2]$.