Lineární algebra

Determinanty a vlastní čísla

Petr Liška

Masarykova univerzita

4.12.2024

Determinant

Definice

Determinant $|A|$ čtvercové matice $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ je číslo

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}\,.$$

Determinant $|A|$ čtvercové matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$ je číslo

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}|A_{1n}| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}|,$$

kde A_{1j} značí matici, která vznikla z matice A odebráním prvního řádku a j-tého sloupce.

Křížové pravidlo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Sarrusovo pravidlo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Pro výpočet determinantů vyšších řádů můžeme využít i následujícího vztahu:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{l+k} a_{lk} |A_{lk}|, \qquad l \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq l \leq n,$$

ve kterém A_{lk} je matice, která vznikne z matice A vypuštěním l-tého řádku a k-tého sloupce.

Příklad

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} &= 3 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot (-2) \\ &- 4 \cdot 3 \cdot 2 - (-2) \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = \\ &= 9 - 16 + 4 - 24 + 24 - 1 = -4 \end{aligned}$$

Příklad

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{aligned} |A| &= 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ & \quad +2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot [3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2) \cdot (-4) \\ & \quad -(-2) \cdot 1 \cdot (-1) - (-4) \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-2) \cdot 2] = 6 \end{aligned}$$

V „realitě“ se na to musí jinak

Příklad

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$$

Věta

Determinant, který má pod hlavní diagonálou samé nuly, je roven součinu prvků v této diagonále.

Věta

1. *Vynásobíme-li libovolný řádek (sloupec) matice číslem k, determinant matice bude k-násobkem determinantu matice původní.*
2. *Zaměníme-li pořadí dvou řádků (sloupců) matice, determinant výsledné matice bude mít opačné znaménko než determinant matice původní.*
3. *Přičtením k-násobku libovolného řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci) se determinant matice nezmění.*

Příklad s úpravou

Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -3 & -5 & 2 \\ -4 & 5 & -4 \end{vmatrix} = -195$$

Inverzní matice a soustavy rovnic

Definice

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n splňující vztahy

$$A^{-1}A = I = AA^{-1},$$

nazýváme matici A^{-1} *inverzní maticí k matici* A.

Věta

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *je čtvercová matice řádu* n *taková, že k ní existuje* A^{-1}. *Potom systém lineárních rovnic* $A\vec{x} = \vec{b}$ *má právě jedno řešení* $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ *pro libovolné* $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Jak inverzní matici najít?

Věta

Nechť A je čtvercová matice. Jestli sekvence elementárních řádkových úprav převede matici A na jednotkovou, pak stejná sekvence elementárních řádkových úprav převede jednotkovou matici na A^{-1}.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -24 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 6 & 0 & -15 & 10 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 12 & 0 & 0 & 36 & -20 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Souvislosti

Věta

Nechť $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, *pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

1. *Řádky matice* A *jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory.*
2. *Sloupce matice* A *jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory.*
3. *K matici* A *existuje invezní matice* A^{-1}.
4. $|A| \neq 0$
5. *Soustava lineárních rovnic* $AX = B$ *má pro libovolnou pravou stranu* B *jediné řešení.*
6. *Homogenní soustava rovnic* $AX = 0$ *má pouze nulové řešení.*
7. *Každý vektor z* $\mathbb{R}^n$ *lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice* A *a to jednoznačně (až na pořadí).*

Vlastní vektory a vlastní čísla

Definice

Nechť A je čtvercová matice, λ je komplexní číslo a $\vec{x}$ je nenulový vektor, který je řešením rovnice

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}. \tag{1}$$

Pak se komplexní číslo λ nazývá *vlastní číslo* matice A a vektor $\vec{x}$ se nazývá *vlastní vektor* matice A (příslušný vlastnímu číslu λ).

$$A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{o} \quad \Longrightarrow \quad (A - \lambda I)\,\vec{x} = \vec{o}$$

Věta

Vlastní čísla matice A jsou řešením tzv. charakteristické rovnice s neznámou λ

$$|A - \lambda I| = 0\,.$$

Příklad

Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 3t, x_1 = 2t \quad \Longrightarrow \quad (2,3)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \Longrightarrow \quad x_2 = t, x_1 = -t \quad \Longrightarrow \quad (-1,1)$$

Příklad

Vypočtěte vlastní čísla matice

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 5 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2$$

Věta (Perron)

Je-li P čtvercová matice taková, že všechny její koeficienty jsou kladná čísla, pak matice A má kladné reálné vlastní číslo λ_1 a jemu odpovídající vlastní vektor má všechny složky kladné. Navíc je-li λ jiné vlastní číslo, pak $|\lambda| \leq \lambda_1$.

Stěhování - naposledy

Předpokládejme, že populace se stěhuje mezi dvěma regiony, např. venkovem a městem podle následujícího schématu. Každý rok se 50% obyvatel venkova přestěhuje do měst a 25% obyvatel měst se přestěhuje na venkov. Jestli tento vzor migrace bude pokračovat vyprázdní se venkov nebo se situace stabilizuje?

Řešení:

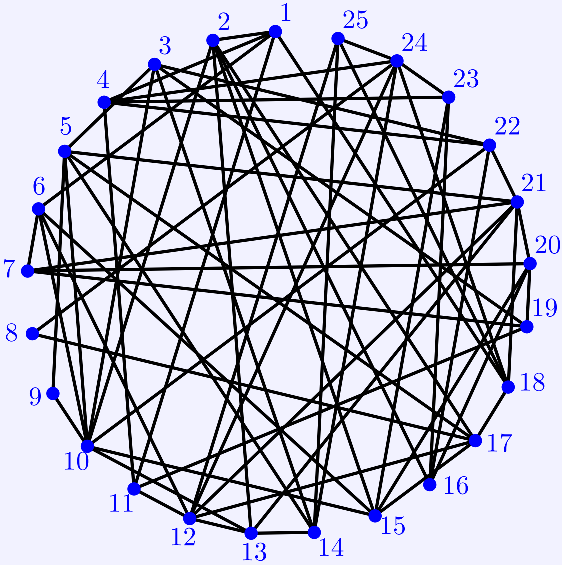
$$\begin{pmatrix} v_{k+1} \\ m_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_k \\ m_k \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0{,}5-\lambda & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}75-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - 1{,}25\lambda + 0{,}25 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0{,}25$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & -0{,}25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v = \frac{1}{3}, m = \frac{2}{3}$$

Sociální sítě

Kdo je nejvýznamnější postavou v této síti vztahů?

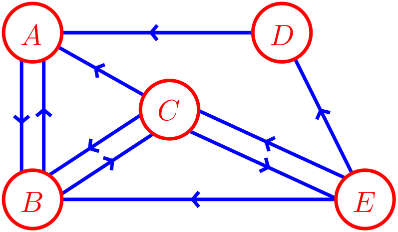


Metrika, která měří i kvalitu kontaktů v tom smyslu, že lepší jsou kontakty, které mají hodně kontaktů, se nazývá *centralita měřená koeficientem vlastního vektoru* (eigenvector centrality). Máme-li graf s n vrcholy, definujeme hodnotu pro vrchol x_v jako

$$x_v = \frac{1}{\lambda} \sum_{t=1}^{n} a_{vt} x_t,$$

kde a_{vt} je příslušný koeficient z matice sousednosti. Přepisem definice do vektorů a matic dostaneme definici vlastního vektoru. Vlastních čísel a tím pádem i vlastních vektorů je více, ale jediný vlastní vektor, pro který je zaručeno, že všechny složky jsou kladné, je podle Perronovy věty vlastní vektor příslušný největší vlastní hodnotě.

„Jak funguje Google?“



$$P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{11}{18} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & 1 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 1 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \cdots, P^{32} = \begin{pmatrix} 0{,}293 & 0{,}293 & 0{,}293 & 0{,}293 & 0{,}293 \\ 0{,}390 & 0{,}390 & 0{,}390 & 0{,}390 & 0{,}390 \\ 0{,}220 & 0{,}220 & 0{,}220 & 0{,}220 & 0{,}220 \\ 0{,}024 & 0{,}024 & 0{,}024 & 0{,}024 & 0{,}024 \\ 0{,}073 & 0{,}073 & 0{,}073 & 0{,}073 & 0{,}073 \end{pmatrix}$$

$$\pi^T = (0{,}293; 0{,}390; 0{,}220; 0{,}024; 0{,}073)$$

$$P \cdot \pi = \pi.$$

$$
\begin{pmatrix}
0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}
$$

$$\lambda^{25} - 60\lambda^{23} - 33\lambda^{22} + 1418\lambda^{21} + 1201\lambda^{20} - 17690\lambda^{19}$$
$$- 17820\lambda^{18} + 130270\lambda^{17} + 140616\lambda^{16} - 596765\lambda^{15}$$
$$- 645895\lambda^{14} + 1744968\lambda^{13} + 1781922\lambda^{12} - 3289284\lambda^{11}$$
$$- 2952158\lambda^{10} + 3956100\lambda^{9} + 2846182\lambda^{8} - 2892728\lambda^{7}$$
$$- 1481747\lambda^{6} + 1131223\lambda^{5} + 364297\lambda^{4} -$$
$$172595\lambda^{3} - 37618\lambda^{2} + 5588\lambda + 1064 = 0$$

$$\lambda_{max} = 5{,}391148524748294$$

$$(1, 1{,}396, 1{,}084, 0{,}920, 1{,}306, 1{,}181, 0{,}742, 0{,}479, 0{,}562,$$
$$1{,}724, 0{,}829, 1{,}493, 1{,}291, 1{,}084, 1{,}409, 0{,}774, 1{,}326,$$
$$1{,}067, 0{,}659, 0{,}899, 1{,}261, 1{,}069, 0{,}808, 1{,}254, 0{,}908)$$

Leslieho model

Příklad

Uvažujme například populaci hmyzu rozdělenou na tři životní etapy: mláďata, mladistvé a dospělé jedince, přičemž každá životní etapa trvá jeden rok. Pravděpodobnost přežití mláďat je 50 % a nerozmnožují se. Mladiství mají pravděpodobnost přežití 25 % a každý z nich má průměrně čtyři mláďata. Dospělí jedinci mají pravděpodobnost přežití 0 % a každý z nich má průměrně tři mláďata. Předpokládejme, že máme 100 samiček, přičemž 40 jsou mláďata, 40 jsou mladiství a 20 dospělí. Jak se bude taková populace samiček vyvíjet v čase?

Po jednom roce bude počet mláďat

$$40 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 220.$$

Počet mladistvých bude počet mláďat, která přežijí, tj.

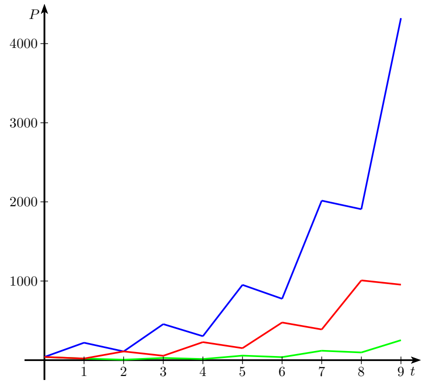
$$40 \cdot 0{,}5 = 20$$

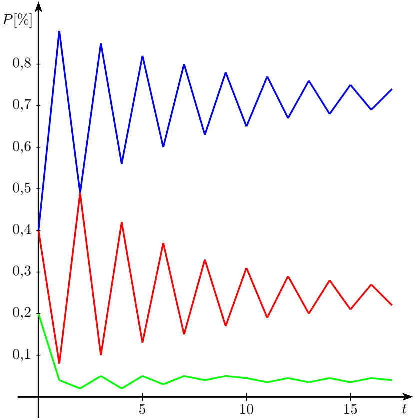
a podobně pro dospělé

$$40 \cdot 0{,}25 = 10.$$

Všechny tyto výpočty můžeme snadno zapsat jednou maticovou rovnicí

$$L \cdot \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_1 \,.$$





Věta

Každá Lesliho matice má právě jedno kladné vlastní číslo. Tomuto číslu odpovídá vlastní vektor, jehož všechny složky jsou kladné.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 3 \\ 0{,}5 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}25 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda + 0{,}375 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1{,}5$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1{,}5 & 4 & 3 & 0 \\ 0{,}5 & -1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & -1{,}5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow (18t, 6t, t)$$

$$72\,\%, \quad 24\,\%, \quad 4\,\%$$