Jak popsat změnu

Funkce, limita, derivace

Petr Liška

Masarykova univerzita

02.10.2024

Funkce

Definice

Nechť jsou dány neprázdné množiny $D \subseteq \mathbb{R}, H \subseteq \mathbb{R}$. Předpis f, který každému $x \in D$ přiřazuje právě jedno $y \in H$, nazýváme *funkcí* jedné proměnné. Tuto funkci označujeme

$$y = f(x).$$

Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f a značí se $D(f)$, množina H se nazývá *obor hodnot* funkce f a značí se $H(f)$.

Definice

Grafem funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ je množina bodů

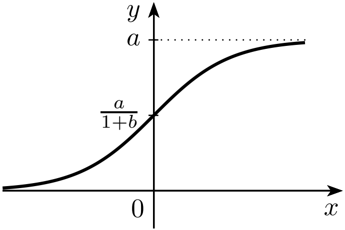
$$G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f)\}.$$

Typické (netypické) funkce v ekonomii

Logistická funkce (saturační proces)

$$y = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-cx}}$$

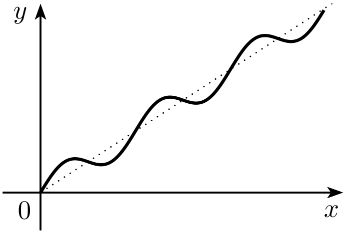
$$a,\ b,\ c > 0$$



Trendová funkce s periodickými fluktuacemi

$$y = a + bx + c \sin dx$$

$$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$$



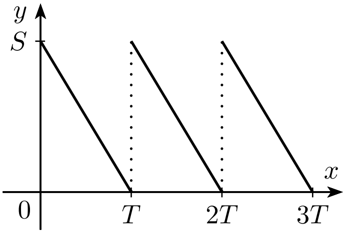
Typické (netypické) funkce v ekonomii a sociologii

„Zásobovací“ funkce

$$y = iS - \frac{S}{T}x$$

$$(i-1)T \leq x \leq iT$$

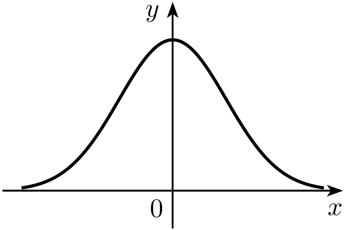
$$S, T > 0,\ i = 1, 2, \ldots$$



Gaussova funkce

$$y = a\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$$

$$a,\ b,\ c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0$$



Vlastnosti funkcí

Definice

Nechť x_0, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Pak interval $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nazveme *okolím* bodu x_0, interval $[x_0, x_0 + \delta)$ *pravým okolím* bodu x_0 a interval $(x_0 - \delta, x_0]$ *levým okolím* bodu x_0. Množina $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ se nazývá *ryzí okolí* bodu x_0. Buď $a \in \mathbb{R}$. Pak interval $\mathcal{O}(+\infty) = (a, +\infty)$ nazveme okolím bodu $+\infty$ a interval $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty, a)$ nazveme okolím bodu $-\infty$.

Definice

Řekneme, že funkce f je *rostoucí v bodě* x_0, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, že pro $x_0 - \delta < x < x_0$ je $f(x) < f(x_0)$ a pro $x_0 < x < x_0 + \delta$ je $f(x) > f(x_0)$.

Analogicky se definuje funkce *klesající v bodě*, *neklesající v bodě* a *nerostoucí v bodě*. Společný název pro tyto čtyři vlastnosti je funkce *monotónní v bodě*, resp. pro první dvě funkce *ryze monotónní v bodě*.

Definice

Nechť je dána funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ a interval $I \subseteq D(f)$. Pak funkci f nazveme *rostoucí na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkci f nazveme *klesající na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce, která je rostoucí nebo klesající, se nazývá *ryze monotónní*.

Definice

Funkce f se nazývá *prostá*, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Nové funkce ze starých

Definice

Nechť $u\colon A \to B$ a $f\colon B \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Pak funkce $F\colon A \to \mathbb{R}$ daná předpisem $y = f(u(x))$ se nazývá *složená funkce*. Funkce u se nazývá *vnitřní* složkou, funkce f *vnější* složkou složené funkce F.

Definice

Inverzní funkcí k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a ke každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě jedno $x \in D(f)$ takové, že $f(x) = y$.

Věta

Inverzní funkcí k funkci f rostoucí (klesající) na množině $D(f)$ je rostoucí (klesající) funkce na množině $H(f)$.

Pro připomenutí

Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ a $c \in \mathbb{R}$. Pro $a > 1$ definujme

$$a^c = \sup \left\{a^x : x \in \mathbb{Q},\, x \leq c\right\} .$$

Pro $a = 1$ položmě $a^c = 1^c = 1$ a pro $0 < a < 1$ definujme $a^c = \left(\frac{1}{a}\right)^{-c}$.

Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Funkci f určenou předpisem $f(x) = a^x$ nazveme exponenciální funkcí o základu a.

Věta

Exponenciální funkce $f(x) = a^x$ má tyto vlastnosti:

1. $D(f) = \mathbb{R}$ *a* $H(f) = (0, +\infty)$ *pro* $a \neq 1$, $H(f) = \{1\}$ *pro* $a = 1$.
2. *Funkce* f *je rostoucí v* $\mathbb{R}$ *pro* $a > 1$, *klesající v* $\mathbb{R}$ *pro* $a < 1$ *a konstantní v* $\mathbb{R}$ *pro* $a = 1$.

Definice

Buď $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Funkce inverzní k funkci $y = a^x$ se nazývá logaritmická funkce o základu a, značí se $y = \log_a x$.

Věta

Logaritmická funkce $f(x) = \log_a x$ má tyto vlastnosti:

1. $D(f) = (0, +\infty)$, $H(f) = (-\infty, +\infty)$.
2. *Funkce f je rostoucí na $(0, +\infty)$ pro $a > 1$ a klesající na $(0, +\infty)$ pro $a < 1$.*
3. *Pro $x, y \in (0, +\infty)$ a $z \in \mathbb{R}$ platí*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \quad \log_a x^z = z \log_a x.$$

4. *Pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ a $x \in (0, +\infty)$ platí*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Cyklometrické funkce

Definice

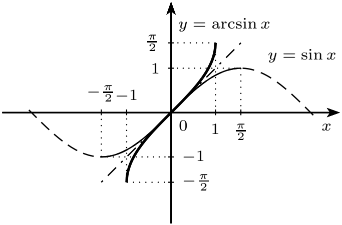
Inverzní funkce k funkci $\sin x$ definované na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se označuje $\arcsin x$.

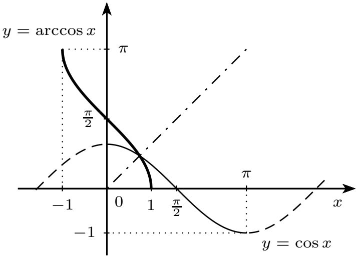
Inverzní funkce k funkci $\cos x$ definované na $[0, \pi]$ se označuje $\arccos x$.

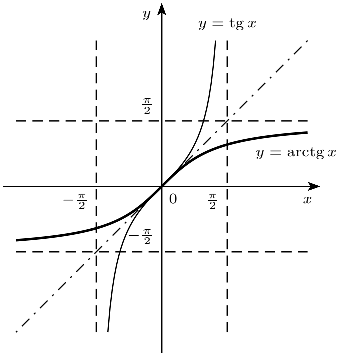
Inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ definované na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se označuje $\operatorname{arctg} x$.

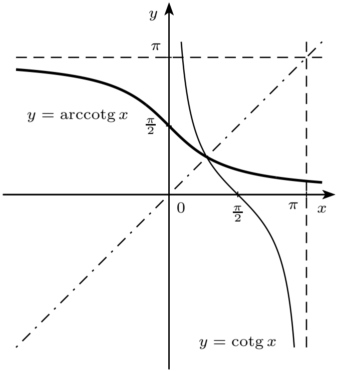
Inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ definované na $(0, \pi)$ se označuje $\operatorname{arccotg} x$.

Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ nazýváme *cyklometrické funkce.*


$y = \arcsin x$
$\frac{\pi}{2}$
1
$y = \sin x$
$-\frac{\pi}{2}$ -1
0
1
$\frac{\pi}{2}$
x
-1
$-\frac{\pi}{2}$


$y = \arccos x$
π
$\frac{\pi}{2}$
π
-1
0
1
$\frac{\pi}{2}$
x
-1
$y = \cos x$


y
$y = \operatorname{tg} x$
$\frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arctg} x$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
x
$-\frac{\pi}{2}$


y
π
$y = \operatorname{arccotg} x$
$\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
x
$y = \operatorname{cotg} x$

Limita a spojitost

„Naivní“ definice

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x_0, ale různé od x_0. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu rovnu ∞, jestliže hodnoty funkce $f(x)$ můžeme udělat libovolně velké tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x_0, ale různé od x_0. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

a říkáme, že funkce má *ve vlastním bodě nevlastní limitu.*
Funkce $y = f(x)$ má v bodě ∞ limitu L, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně velké. Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Říkáme, že funkce má v *nevlastním bodě vlastní limitu.*
Funkce $y = f(x)$ má v bodě ∞ limitu ∞, jestliže hodnoty funkce $f(x)$ můžeme udělat libovolně velké tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně velké. Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Říkáme, že funkce má v *nevlastním bodě nevlastní limitu.*

Věta

Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zleva rovnu L, píšeme

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L,$$

jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x menší než x_0 a dostatečně blízké hodnotě x_0. Analogicky definujeme i limitu zprava a nevlastní limity.

Věta

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L\,.$$

Věta

Nechť existují vlastní limity $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2$. *Pak platí:*

a) $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,

b) $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$,

c) Je-li $L_2 \neq 0$, *pak* $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$,

d) $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)|$.

Platí

$$\infty + \infty = \infty, \quad \infty \cdot \infty = \infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{+0} = +\infty, \quad \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Nevíme

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Spojitost funkce

Definice

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *spojitá*, jestliže je limita funkce v tomto bodě rovna funkční hodnotě v tomto bodě, tj.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Analogicky se definuje spojitost zprava/zleva.

Definice

Nechť f je funkce a $I \subseteq D(f)$ je interval. Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu I, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Patří-li navíc levý (pravý) koncový bod do I, je v něm funkce spojitá zprava (zleva).

Vlastnosti spojitých funkcí

Věta (Weierstrassova věta)

Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak je na tomto intervalu ohraničená a nabývá zde své největší a nejmenší hodnoty.

Věta (Bolzanova věta)

Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.

Důsledek

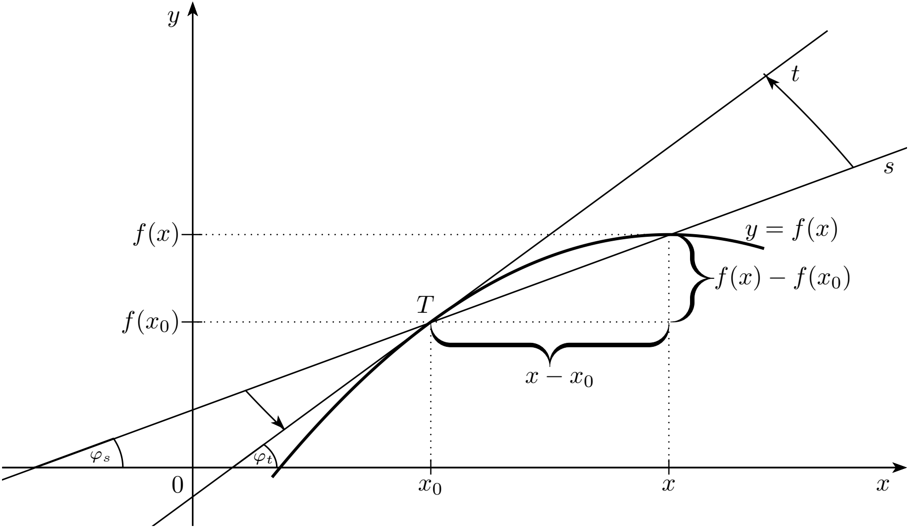
Je-li funkce f spojitá na intervalu $I = [a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$, pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.

Spojité (tam, kde jsou definované) jsou všechny tzv. *elementární funkce*, tj.

- polynomy
- exponenciální a logaritmické funkce
- goniometrické a cyklometrické funkce
- mocninné funkce

a funkce, které z nich vzniknou konečným počtem sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání.

Derivace funkce



y
t
s
$f(x)$
$y = f(x)$
$f(x) - f(x_0)$
T
$f(x_0)$
$x - x_0$
φ_s
φ_t
0
x_0
x
x

„Naivní“ definice

Derivace $f'(x_0)$ funkce f v bodě x_0 je směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$.

Definice

Buď f funkce a bod $x_0 \in D(f)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

nazýváme tuto limitu *derivací funkce f v bodě x_0* a značíme $f'(x_0)$ nebo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Položíme-li $h = x - x_0$, lze derivaci zapsat ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Věta

Pro derivace elementárních funkcí platí:

$$c' = 0, \qquad (x^a)' = ax^{a-1},$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}, \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1},$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \qquad \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a},$$

kde $a \in \mathbb{R}$ *a* $c \in \mathbb{R}$. *Tyto vzorce platí všude tam, kde jsou příslušné funkce definovány.*

Věta

Nechť mají funkce f, g derivaci na množině M. Pak platí:

- *a)* $\big(cf(x)\big)' = cf'(x)$, $c \in \mathbb{R}$,
- *b)* $\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x)$,
- *c)* $\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
- *d) je-li* $g(x) \neq 0$, *pak* $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Věta

Nechť funkce $u = g(x)$ má derivaci $g'(x)$, funkce $y = f(u)$ má derivaci $f'(u)$ a nechť platí $D(f) \supseteq H(g)$. Pak složená funkce $y = F(x) = f[g(x)]$ má derivaci a platí:

$$F'(x) = f'[g(x)] \cdot g'(x).$$

Příklad

Vypočtěte derivace funkcí

$$y = 3x^3 + x + 2, \quad y = x\mathrm{e}^x, \quad y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2},$$

$$y = \sqrt{2x^2 + x}, \quad y = \ln^2 \sin x$$

Z geometrického významu derivace plyne, že funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když její graf má v bodě $(x_0, f(x_0))$ tečnu se směrnicí $f'(x_0)$. Rovnice této tečny je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Věta

Nechť f má derivaci na otevřeném intervalu I.

a) *Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f rostoucí na I.*

b) *Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f klesající na I.*

Věta

Nechť funkce f, g mají derivace v každém bodě otevřeného intervalu I. Jestliže pro všechna $x \in I$ platí $f'(x) = g'(x)$, pak se funkce f, g liší o konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + c$. Zejména jestliže $f'(x) = 0$ na I, pak je f na I konstantní.