

Primitivní funkce, neurčitý integrál

Od rychlosti k množství

Petr Liška

Masarykova univerzita

23.10.2024

Primitivní funkce

Definice

Nechť funkce f a F jsou definované na intervalu I . Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

pak říkáme, že funkce F je *primitivní funkcí k funkci f na intervalu I* . Množinu všech primitivních funkcí k funkci f nazýváme *neurčitý integrál* funkce f a označujeme

$$\int f(x) dx.$$

Z definice neurčitého integrálu plyne, že

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x), \quad \int F'(x) dx = F(x) + c,$$

tj. operace derivování a integrování jsou navzájem komplementární.

Věta

Je-li funkce F primitivní k funkci f na intervalu I , pak každá jiná primitivní funkce k funkci f má tvar $F + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.

Věta

Je-li funkce f spojitá na intervalu I , pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.

Věta

Nechť na intervalu I existují neurčité integrály $\int f(x) dx$ a $\int g(x) dx$ a nechť $\alpha \neq 0$. Pak na I existuje neurčitý integrál funkce $f + g$ a neurčitý integrál funkce αf a platí

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx, \quad (1)$$

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx. \quad (2)$$

- (1) $\int 1 \, dx = x + c,$
- (2) $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1,$
- (3) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c,$
- (4) $\int e^x \, dx = e^x + c,$
- (5) $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$
- (6) $\int \sin x \, dx = -\cos x + c,$
- (7) $\int \cos x \, dx = \sin x + c,$
- (8) $\int \frac{1}{x^2+1} \, dx = \operatorname{arctg} x + c,$
- (9) $\int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-x_0}{a} \right) + c,$
- (10) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c,$
- (11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} \, dx = \ln |x + \sqrt{x^2+a}| + c,$
- (12) $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x + c,$
- (13) $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\operatorname{cotg} x + c,$
- (14) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln |f(x)| + c,$
- (15) $\int f(x) \, dx = F(x) + c \implies \int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c.$

Příklad

Vypočtěte neurčité integrály

a) $\int (3x^2 + 2e^x + 1) dx,$

b) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x}\right) dx,$

c) $\int \frac{1}{3x+2} dx,$

d) $\int \frac{2x^2}{x^3-1} dx,$

e) $\int (2x + 1)^5 dx,$

f) $\int e^{2x} dx,$

g) $\int \frac{1}{x^2+4} dx,$

h) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx,$

i) $\int \frac{4}{8x^2+2} dx,$

j) $\int \frac{1}{x^2-2x+3} dx.$

Spotřeba přírodních zdrojů

Odhaduje se, že světová spotřeba stříbra (v tisíci tunách) se řídí funkcí $f(t) = 21,4e^{0,01t}$, kde t značí počet let, které uplynou od současnosti. Celkové zásoby stříbra se odhadují na 400 000 tun. Odhadněte, kdy tyto zásoby stříbra dojdou.

Řešení: Celkovou spotřebu $C(t)$ získáme integrací funkce f

$$C(t) = \int 21,4e^{0,01t} dt = 21,4 \int e^{0,01t} dt = 21,4 \frac{1}{0,01} e^{0,01t} + c = 2140e^{0,01t} + c$$

Musíme ještě určit integrační konstantu c . Celková spotřeba za prvních nula let musí být nula, tedy víme, že $C(0) = 0$.

$$0 = C(0) = 2140e^0 + c = 2140 + c \implies c = -2140$$

Pro celkovou spotřebu tak dostaneme vztah

$$C(t) = 2140e^{0,01t} - 2140.$$

Abychom předpověděli, kdy rezervy ve výši 400 tisíc tun dojdou, musíme vyřešit následující rovnici

$$2140e^{0,01t} - 2140 = 400.$$

Odtud

$$2140e^{0,01t} = 2540$$

$$e^{0,01t} = \frac{2540}{2140} \approx 1,187$$

$$\ln e^{0,01t} = \ln 1,187$$

$$0,01t = 0,171$$

$$t = 17,1 \text{ let}$$

Věta (Metoda per partes)

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu I . Pak platí

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.$$

Příklad

Vypočtěte

a) $\int x^2 \sin x dx,$

b) $\int x \ln x dx .$

Věta (Substituční metoda)

Nechť funkce f má na intervalu J primitivní funkci F , funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu I a $\varphi(x) \in J$ pro $x \in I$. Pak má složená funkce $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ primitivní funkci na intervalu I a platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c.$$

Podobně lze použít substituci opačnou, tj. $x = \psi(t)$. Tuto substituční metodu můžeme zapsat ve tvaru

$$\int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \psi(t) \\ dx = \psi'(t) dt \end{array} \right| = \int f(\psi(t))\psi'(t) dt.$$

Příklad

Vypočtěte neurčité integrály

a) $\int 5xe^{x^2} dx,$

b) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$