Dynamické procesy aneb diferenciální rovnice

Od rychlosti k množství

Petr Liška

Masarykova univerzita

30.10.2024

Ponziho schéma

Předpokládejme, že máme na začátku 10 investorů, přičemž každý vloží do fondu 100 000 Kč a je mu slíbena 20 % návratnost investice každý měsíc. Z vloženého milionu tak vyplatíme každému investorovi 20 000 Kč a zbylých 800 000 Kč si necháme. Označme y počet investorů, které potřebujeme, abychom mohli investory nadále vyplácet a přitom si pokaždé nechat částku 800 000 Kč.

Řešení: Budeme-li částky uvažovat v tisících, pak máme

$$\begin{aligned} \text{příjem} &= 100\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \text{výdej} &= 20y + 800. \end{aligned}$$

$$100\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 20y + 800.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}2y + 8.$$

Logistický růst

Předpokládejme, že rychlost růstu nějaké populace je přímo úměrná její velikosti. Je-li t čas a P je počet jedinců v populaci v čase t, dostaneme pro rychlost růstu populace

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP, \qquad k > 0.$$

Mnoho populací se začne rozrůstat exponenciálně, ale jakmile se počet jedinců přibliží nosné kapacitě K prostředí růst se zpomalí, případně velikost populace začne klesat, pokud její velikost tuto hodnotu překročí. Pro tento model máme tedy následující předpoklady:

$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \approx kP$ pro malá P, tj. ze začátku populace roste přímo úměrně svojí velikosti,

$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} < 0$, jestliže $P > K$, tj. velikost populace se zmenšuje, jestliže počet jedinců přesáhne kapacitu prostředí.

Řešení:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Diferenciální rovnice

Definice

Nechť $G \in \mathbb{R}^2$, $f\colon G \to \mathbb{R}$, pak obyčejnou *diferenciální rovnicí prvního řádu* nazveme rovnici ve tvaru:

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

kde y vystupuje jako závislá proměnná a f je funkce dvou proměnných. *Řešením* této rovnice pak rozumíme každou funkci φ, která je diferencovatelná na nějakém otevřeném intervalu I a pro kterou platí:

$$y' = f(x, \varphi(x)) \qquad \text{pro}\, x \in I \tag{2}$$

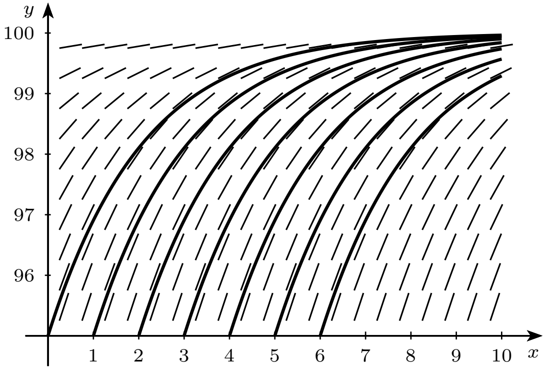
Nechť je dán bod $[x_0, y_0] \in G$. Pak úlohu najít řešení diferenciální rovnice, pro kterou platí:

$$\varphi(x_0) = y_0, \tag{3}$$

nazveme *počáteční úlohou*.

Geometrický význam

$$y' = f(x, y),$$



Směrové pole rovnice $y' = \frac{1}{2}y\left(1 - \frac{1}{100}y\right)$ a řešení pro různé počáteční podmínky

Rovnice se separovatelnými proměnnými

Jde o rovnici tvaru

$$y' = f(x)g(y),$$

kde f a g jsou spojité funkce.
Vyjádříme-li $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, tak dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$

Nejprve si všimněme, že konstantní funkce určené $g(y) = 0$ jsou řešením
Za předpokladu $g(y) \neq 0$ *separujeme* proměnné

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

a tuto rovnost integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jednoduchý příklad

$$x^3 y' = 2y, \qquad y(0) = 1\,.$$

Řešení. Odseparujeme proměnné

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2}{x^3}\mathrm{d}x\,.$$

A rovnici zintegrujeme

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int 2x^{-3}\,\mathrm{d}x\,.$$

Vypočteme integrály a vyjádříme y

$$\ln|y| = -\frac{1}{x^2} + c \Longrightarrow y = K\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\,.$$

Dosazením počáteční podmínky dostaneme hodnotu K

$$1 = K\mathrm{e}^0 \Longrightarrow K = 0\,.$$

Tři jednoduché modely růstu

V mnoha případech je růst veličiny přímo úměrný jeho současnému množství:

$$y' = ay, \qquad a > 0.$$

Pro úplnost je nutné doplnit i počáteční podmínku (velikost pozorované veličiny na začátku)

$$y(0) = k, \qquad k > 0.$$

Rovnici můžeme vyřešit separací proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ay$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int a \,\mathrm{d}t$$

$$\ln y = at + C$$

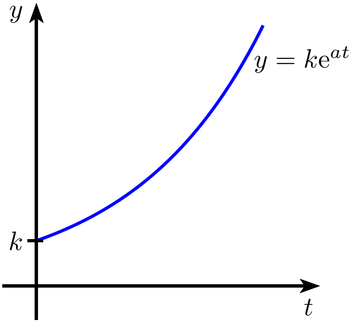
$$y = \mathrm{e}^{at+C} = \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{C} = c\mathrm{e}^{at}$$

Dosazením počáteční podmínky dostaneme

$$y(0) = c\mathrm{e}^{0} = k \quad \Longrightarrow \quad c = k.$$

Řešením počáteční úlohy tedy je funkce

$$y = k\mathrm{e}^{at}\,.$$



Jestliže veličina nemůže růst nad nějakou určitou mez M, potom je rozumné například uvažovat, že rychlost růstu je přímo úměrná tomu, jak moc je daná veličina daleko od svého limitu:

$$y' = a(M - y).$$

Opět doplníme počáteční podmínku $y(0) = k$ a rovnici vyřešíme.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a(M - y)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{M - y} = \int a \,\mathrm{d}t$$

$$\ln(M - y) = -at - C$$

$$M - y = \mathrm{e}^{-at-C} = c\mathrm{e}^{-at}$$

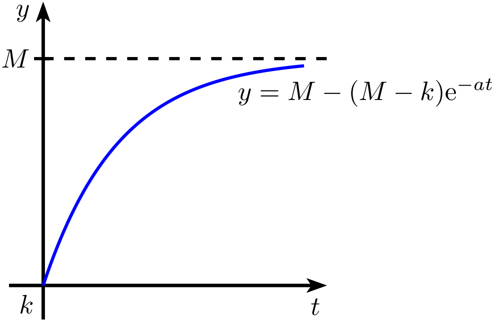
$$y = M - c\mathrm{e}^{-at}$$

Po dosazení počáteční podmínky dostaneme

$$y(0) = M - c\mathrm{e}^0 = M - c = k \quad \Longrightarrow \quad c = M - k$$

a počáteční problém je tedy vyřešen funkcí

$$y = M - (M - k)\mathrm{e}^{-at}.$$

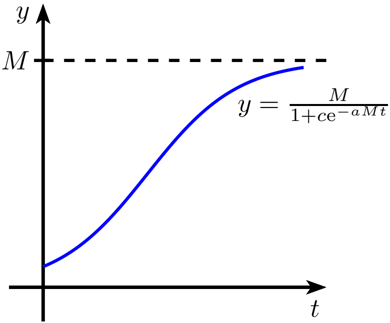


Pro komplexnější model bychom mohli uvažovat, že rychlost růstu dané veličiny je přímo úměrná její současné velikosti a zároveň vzdálenosti od od horního limitu M.
Dostaneme tak diferenciální rovnici

$$y' = ay(M - y).$$

Jedná se opět o rovnici se separovanými proměnnými (kterou je již složitější vyřešit) a jejím řešením je funkce

$$y = \frac{M}{1 + c\mathrm{e}^{-aMt}}.$$



Velikost úspor

Zdrojem osobního majetku jsou typicky dva zdroje. Plat a výnosy z investic. Z těchto příjmů můžeme rozlišit tři základní typy výdajů. Nutné výdaje, zbytné výdaje a investice. Pro jednoduchost můžeme uvažovat, že po zaplacení nutných výdajů, utratíme fixní část zbylých příjmů za zbytné výdaje a zbylou část investujeme. Dále uvažujme, že investice generují příjem s fixním úrokem a na začátku máme nulové úspory. Popište matematicky tento model a nalezněte funkci, která popisuje velikost úspor v čase.

Výměna peněz

Za jak dlouhou vymění 90 % bankovek v zemi, kde je v oběhu 10^9 dolarů v bankovkách a každý den přes banku projde $5 \cdot 10^7$ dolarů?
Je rozumné předpokládat, že rychlost výměny starých bankovek v oběhu za nové je přímo úměrná počtu bankovek, které ještě nebyly vyměněny.