Určitý integrál

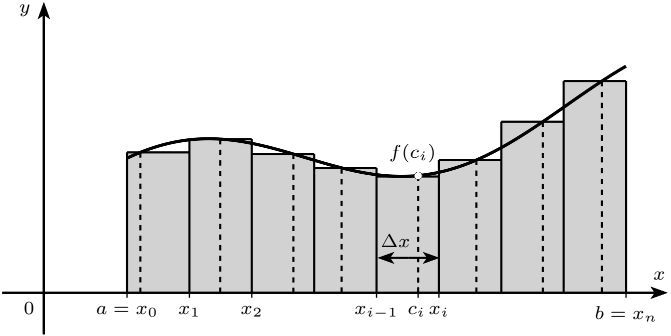
Obsah a jeho interpretace

Petr Liška

Masarykova univerzita

13.11.2024

Jak určit obsah?



Definice a základní vlastnosti určitého integrálu

Definice

Nechť f je funkce ohraničená na $[a, b]$. Nechť $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ jsou body dělící interval $[a, b]$ na n stejných subintervalů délky $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ a nechť $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. *Určitým integrálem funkce f od a do b* rozumíme

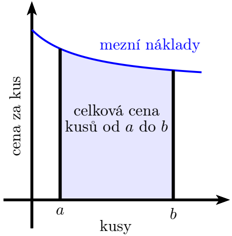
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x,$$

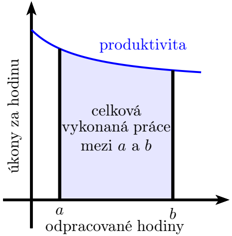
jestliže tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů c_i. Píšeme

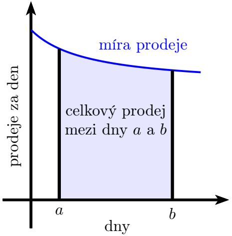
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

a říkáme, že funkce f je *integrovatelná* na $[a, b]$.
Číslo a nazýváme *dolní mez*, číslo b *horní mez* a funkci f *integrand*.

Typické aplikace určitého integrálu







Věta (Newton-Leibnizova formule)

Je-li funkce f spojitá na $[a, b]$, pak platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{1}$$

kde F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $[a, b]$.

Často píšeme místo $F(b) - F(a)$ označení $\big[F(x)\big]_a^b$, tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

Příklad

Vypočtěte určité integrály

$$\text{a)} \quad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x, \qquad\qquad \text{b)} \quad \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Vlastnosti určitého integrálu)

Jsou-li funkce f a g spojité na intervalu $[a, b]$, pak platí tyto vztahy:

a) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$;

b) $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$;

c) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *kde* $a < c < b$;

d) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$, *jestliže* $f(x) \geq 0$ *na intervalu* $[a, b]$;

e) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, *jestliže* $f(x) \geq g(x)$ *na intervalu* $[a, b]$.

Vlastnost c) lze použít pro případ, kdy je funkce f spojitá na intervalu $[a, c]$ a $[c, b]$, ale není spojitá v bodě c. Například funkce $\operatorname{sgn} x$ není spojitá pro $x = 0$ a přitom můžeme definovat určitý integrál

$$\int_{-2}^{1} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = -2 + 1 = -1.$$

Integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $a > b$ definujeme vztahem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x,$$

a integrál $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x$ definujeme vztahem

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Definujeme-li pro každé číslo $x \in [a, b]$ funkci

$$U(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

pak derivace této funkce je $U'(x) = f(x)$ a $U(a) = 0$. Tímto způsobem někdy vyjadřujeme funkce, které jsou primitivní k funkci f, ale nejsou elementárními funkcemi, např. funkce

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Tyto funkce se nazývají transcendentní.

Metoda per partes a substituce pro určité integrály

Věta (Metoda per partes pro určitý integrál)

Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta (Substituce pro určitý integrál)

Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $[a, b]$. Nechť funkce $\varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$ a $\varphi(x)$ zobrazuje interval $[\alpha, \beta]$ do intervalu $[a, b]$. Pak platí

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad

Vypočtěte určité integrály

$$\text{a)} \quad \int_1^{\mathrm{e}} x \ln x \, \mathrm{d}x, \qquad \text{b)} \quad \int_1^{\sqrt{6}} x\sqrt{x^2+3}\, \mathrm{d}x.$$

Věta (Lichoběžníkové pravidlo)

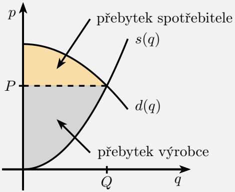
Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a,b]$. Rozdělme interval na n intervalů stejné délky h a krajní body těchto intervalů označme po řadě $x_0, x_1, \dots, x_n$ a jim odpovídající funkční hodnoty funkce f po řadě $y_0, y_1, \dots, y_n$. Pak platí

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)\,.$$

Spotřebitelský přebytek a přebytek výrobce

Spotřebitelský přebytek je celkový peněžitý zisk získaný spotřebitely, když jsou schopni pořídit produkt za nižší cenu než je nejvyšší cena, kterou by byli ochotni zaplatit. Spotřebitelský přebytek tedy měři přínos spotřebitele v ekonomice, kde konkurence drží nízkou cenu. Podobně přebytek výrobce je celková částka, kterou získá výrobce, když prodá produkt za vyšší cenu, než je nejnižší cena, za kterou by byl ochotný produkt prodat (a obvykle se dá zhruba ztotožnit se ziskem).

Je-li d funkce popisující křivku poptávky, s funkce popisující křivku nabídky a P cena při množství Q na trhu, pak v případě, kdy dojde k rovnováze na trhu, vypadá situace takto



Je tedy přirozené matematicky definovat spotřebitelský přebytek PS a přebytek výrobce PV jako

$$PS = \int_0^Q (d(q) - P)\,\mathrm{d}q, \qquad PV = \int_0^Q (P - s(q))\,\mathrm{d}q.$$

Střední hodnota

Nechť f je funkce definovaná a integrovatelná na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Číslo μ definované vztahem

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

se nazývá *střední hodnota* funkce f na intervalu $[a, b]$.

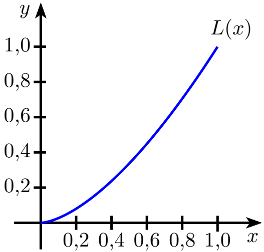
Střední hodnota je vlastně zobecnění aritmetického průměru pro čísla. Geometricky je střední hodnota výška obdélníku, který má základnu tvořenou intervalem $[a, b]$ a obsah $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lorenzova křivka a Giniho index

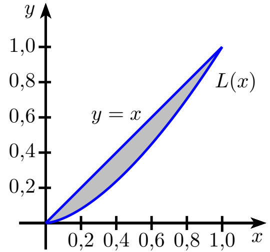
Pro měření nerovnosti ekonomové počítají jaká část celkového příjmu je získána nejchudšími dvaceti procenty populace, nejchudšími čtyřiceti procenty populace atd. Například pro Českou republiku v roce 2018 tato data vypadala takto

část populace	část příjmů
0,2	0,102
0,4	0,249
0,6	0,426
0,8	0,646
1,0	1,000

Graficky tato data reprezentuje tzv. *Lorenzova křivka* $L(x)$, která udává, jaká část celkového příjmu je získána nejchudší částí x populace. Pro naše data je její přibližná rovnice $L(x) = x^{1,57}$.



Absolutní rovnost příjmů znamená, že všichni vydělávají stejně, tj. dolních 10 % získá 10 % všech příjmů, dolních 20 % získá 20 % všech příjmů atd. Lorenzova křivka v tomto případě je tedy graf lineární funkce $y = x$.
Ke změření nerovnosti spočítáme obsah oblasti mezi aktuální Lorenzovou křivkou $L(x)$ a její ideální verzí $y = x$ a tento výsledek vynásobíme dvěma, abychom dostali číslo mezi 0 (absolutní rovnost) a 1 (absolutní nerovnost). Tomutu číslu se říká *Giniho index*.



Matematicky tedy definujeme Giniho index jako

$$GI = 2\int_0^1 (x - L(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Pro Českou republiku dostaneme

$$GI = 2\int_0^1 (x - L(x))\,\mathrm{d}x = GI = 2\int_0^1 \left(x - x^{1{,}57}\right)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{2{,}57}}{2{,}57}\right]_0^1 = 0{,}22\,.$$

Paretův zákon

Ekonom Vilfredo Pareto odhadl, že počet lidí, jejichž příjem je mezi A a B jednotkami měny je dán určitým integrálem

$$\int_A^B (ax)^{-b}\,\mathrm{d}x \qquad (b \neq 1),$$

kde a a b jsou konstanty, přičemž a je hodnota nejmenší možné mzdy. Určete hodnotu tohoto integrálu.

Řešení: Stačí použít jen základní pravidla a Newton-Leibnizovu formuli

$$\begin{aligned}\int_A^B (ax)^{-b}\,\mathrm{d}x &= a^{-b}\int_A^B x^{-b}\,\mathrm{d}x = a^{-b}\left[\frac{x^{-b+1}}{-b+1}\right]_A^B = \\ &= \frac{a^{-b}}{-b+1}\left(B^{-b+1} - A^{-b+1}\right).\end{aligned}$$

Z předchozího zákonu plyne i známý Paretův princip (pro něj je ale nutné dobře zvolit konstantu b o hodnotě $b = \log_4 5 \approx 1{,}16$).