Lineární algebra

Vektory a matice

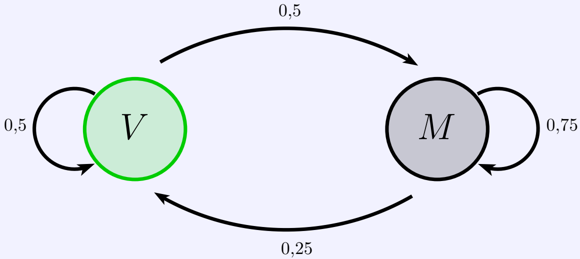
Petr Liška

Mendelova univerzita

20.11.2024

Stěhování

Předpokládejme, že populace se stěhuje mezi dvěma regiony, např. venkovem a městem, podle následujícího schématu. Každý rok se 50% obyvatel venkova přestěhuje do měst a 25% obyvatel měst se přestěhuje na venkov. Je-li například na začátku polovina obyvatel ve městě a tento vzor migrace bude pokračovat, jak bude vypadat stav po dvou letech? A jak bude rozdělení obyvatelstva vypadat z dlouhodobého hlediska? Vyprázdní se venkov? Nebo se situace stabilizuje tak, že část obyvatel bude žít ve městě a část na venkově?

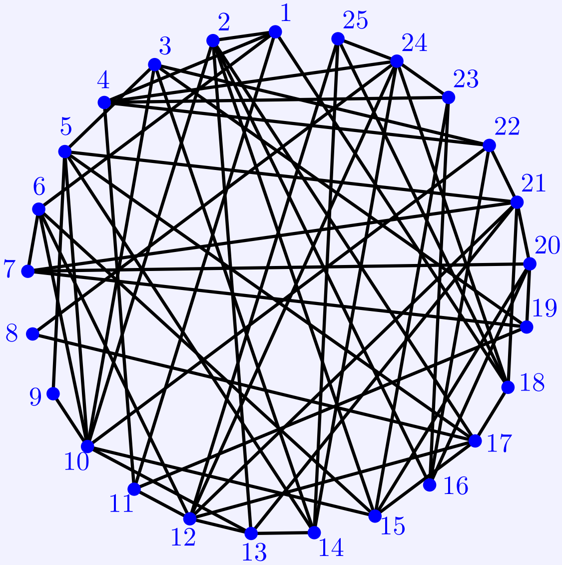


Leslieho model populace

Uvažujme například populaci hmyzu rozdělenou na tři životní etapy: mláďata, mladistvé a dospělé jedince, přičemž každá životní etapa trvá jeden rok. Pravděpodobnost přežití mláďat je 50 % a nerozmnožují se. Mladiství mají pravděpodobnost přežití 25 % a každý z nich má průměrně čtyři mláďata. Dospělí jedinci mají pravděpodobnost přežití 0 % a každý z nich má průměrně tři mláďata. Předpokládejme, že máme 100 samiček, přičemž 40 jsou mláďata, 40 jsou mladiství a 20 dospělí. Jak se bude taková populace samiček vyvíjet v čase?

Sociální sítě

Kdo je nejvýznamnější postavou v této síti vztahů?



Leontiefův model

Ekonomika regionu se skládá ze tří odvětví: průmysl, zemědělství a služby. Každý sektor produkuje komodity a zdrojem jeho příjmů je prodej těchto komodit, přičemž každý sektor potřebuje vstupní komodity (od sebe i ostatních sektorů):

		výstupy		
		Průmysl	Zemědělství	Služby
	Průmysl	0,40	0,20	0,20
vstupy	Zemědělství	0,20	0,40	0,20
	Služby	0,20	0,10	0,40

Kromě toho existuje externí poptávka v hodnotě 30, 30 a 10 miliard na průmysl, zemědělství a služby. Jak velká musí být produkce jednotlivých odvětví?

Vektory a počítání s nimi

Vektor

Vektorem rozumíme libovolnou uspořádánou n-tici $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Značíme

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Jednotlivým prvkům $x_1, x_2, \dots, x_n$ říkáme složky vektoru, číslo n se nazývá dimenze vektoru $\vec{v}$.
Dva vektory $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ jsou si rovny, jestliže se rovnají odpovídající si složky, tj.

$$\vec{x} = \vec{y} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ \dots,\ x_n = y_n.$$

Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$

Množina všech vektorů $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_i \in \mathbb{R}$ společně s operacemi sčítání vektorů

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

a násobením vektoru číslem $c \in \mathbb{R}$

$$c \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n)$$

se nazývá vektorový prostor $\mathbb{R}^n$.

Vektor $\vec{o} = (0, 0, \ldots, 0)$ se nazývá nulový vektor.

Základní algebraické vlastnosti

Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou libovolné vektory z $\mathbb{R}^n$ a c, $d \in \mathbb{R}$, pak

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$
5. $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$
6. $(c + d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$
7. $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$
8. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Skalární součin

Nechť $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Potom *skalární součin* $\vec{x} \cdot \vec{y}$ je definován jako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

$$(1, 2, -2) \cdot (2, 3, -1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) = 10$$

Skalární součin

Nechť $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Potom *skalární součin* $\vec{x} \cdot \vec{y}$ je definován jako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Velikost (norma) vektoru

Velikostí vektoru $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ rozumíme nezáporné číslo

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ortogonální vektory

Vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nazveme *ortogonální*, právě když

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0\,.$$

Lineární kombinace, závislost a nezávislost vektorů

Lineární kombinace

Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ je konečná posloupnost vektorů z vektorového prostoru V. Vektor $\vec{x}$, pro který platí

$$\vec{x} = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \cdots + t_n\vec{x}_n,$$

kde $t_1, t_2, \dots, t_n$ jsou nějaká reálná čísla, se nazývá *lineární kombinace* vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.

LZ a LN

Řekneme, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ jsou *lineárně závislé*, jestliže existují reálná čísla $t_1, t_2, \dots, t_n$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že platí

$$\vec{o} = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \cdots + t_n\vec{x}_n.$$

V opačném případě říkáme, že vektory jsou *lineárně nezávislé*.

Tedy například vektory

$$(1, 2, 1), \quad (2, -3, 1), \quad (4, 1, 3)$$

jsou lineárně závislé, protože

$$2 \cdot (1, 2, 1) + (2, -3, 1) = (4, 1, 3).$$

Vektory

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1)$$

jsou zřejmě lineárně nezávislé.

Matice

Definice

Maticí A rozumíme schéma

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde a_{ij} pro $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$ jsou reálná čísla nebo funkce. Je-li tato matice (tabulka) sestavená z m řádků a n sloupců, říkáme, že A je matice typu $m \times n$. Je-li $m = n$ nazývá se matice A *čtvercová matice*, jinak *obdélníková matice*.

Je-li A čtvercová matice, říkáme, že prvky tvaru a_{ii}, tj. prvky, jejichž řádkový a sloupcový index jsou stejné, tvoří *hlavní diagonálu*.

Operace s maticemi

Nechť $k \neq 0$ je reálné číslo. Výsledkem *násobení matice A číslem k* je matice C, jejíž prvky jsou tvaru

$$c_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$

Příklad

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 20 & 24 \\ -4 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Nechť A, B jsou matice téhož typu $m \times n$. *Součtem* matic A, B nazýváme matici C, jejíž prvky jsou

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Nechť A je matice typu $m \times n$ a B je matice typu $n \times p$. *Součinem* matic A a B (v tomto pořadí) nazýváme matici C (typu $m \times p$), jejíž prvky jsou

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Příklad

Pro dané matice spočtěte $A \cdot B$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 5\cdot(-4) + 7\cdot 2 & 2\cdot 2 + 5\cdot 0 + 7\cdot 11 & 2\cdot 1 + 5\cdot 6 + 7\cdot 1 & 2\cdot 7 + 5\cdot 1 + 7\cdot(-2) \\ -1\cdot 3 + 0\cdot(-4) + 4\cdot 2 & -1\cdot 2 + 0\cdot 0 + 4\cdot 11 & -1\cdot 1 + 0\cdot 6 + 4\cdot 1 & -1\cdot 7 + 0\cdot 1 + 4\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 81 & 39 & 5 \\ 5 & 42 & 3 & -15 \end{pmatrix}$$

Definice

Je-li A matice typu $m \times n$, pak *transponovaná matice* A^T je matice typu $n \times m$, která vznikne z matice A záměnou řádků za sloupce, tj. i-tý sloupec matice A^T je i-tý řádek matice A pro všechna i.

Příklad

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Definice

Diagonální matice je čtvercová matice, která má všechny prvky mimo hlavní diagonálu rovny nule.

Definice

Jednotková matice je čtvercová matice, která má v hlavní diagonále všechny prvky rovny jedné a všechny prvky mimo diagonálu rovny nule. Tuto matici budeme značit I.

Příklad

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Základní vlastnosti počítání s maticemi

Nechť matice A, B, C mají správné rozměry tak, aby se dali provést naznačené operace a $k \in \mathbb{R}$. Pak

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A(BC) = (AB)C$
4. $A(B + C) = AB + AC$
5. $(A + B)C = AC + BC$
6. $k(A + B) = kA + kB$
7. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

Proč se to dělá zrovna takto?

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Cx_1 + Dx_2 \end{pmatrix}$$

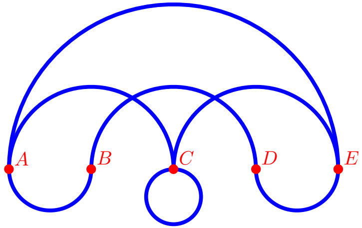
$$f\left(g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Cx_1 + Dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (aA + bC)x_1 + (aB + bD)x_2 \\ (cA + dC)x_1 + (cB + dD)x_2 \end{pmatrix}$$

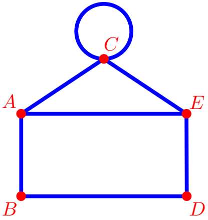
$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}$$

Některé aplikace matic

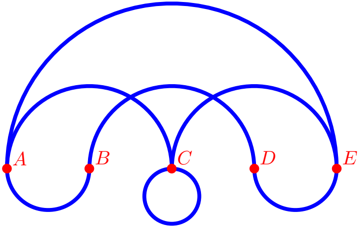
Grafem rozumíme konečnou množinu bodů (těm říkáme vrcholy) a konečnou množinu hran, kdy každá z nich spojuje dva vrcholy (ne nutně různé).

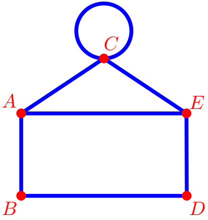




Stejný graf můžeme ale také popsat pomocí tzv. *matice sousednosti*. Pro graf o n vrcholech se jedná o čtvercovou matici $n \times n$ definovanou takto

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li hrana mezi vrcholy } i \text{ a } j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

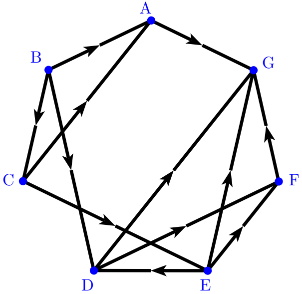




Pro náš graf dostaneme matici

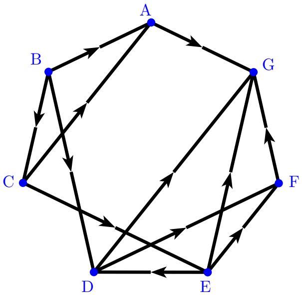
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

V mnoha aplikacích, které můžeme modelovat pomocí grafu, je mezi vrcholy zároveň nějaký vztah, který vede k tomu, že hrana by měla být orientovaná. Tímto dostaneme tzv. *orientovaný graf*.



I pro orientovaný graf můžeme zavést matici sousednosti, kde pro jednotlivé koeficienty platí

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{vede-li hrana z vrcholu } i \text{ do vrcholu } j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



Pro náš graf dostaneme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cestou v grafu rozumíme posloupnost hran, která nám umožní cestovat z jednoho vrcholu do jiného. Její délka je pak číslo určující počet hran, které obsahuje.

Uvažme matici

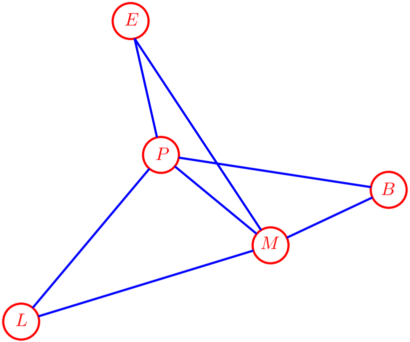
$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Co reprezentují čísla v této matici? Z definice násobení matic víme, že

$$\left(A^2\right)_{13} = a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} + a_{14}a_{43} + a_{15}a_{53}\,.$$

Tento výraz bude nenulový, když alespoň jeden ze součinů $a_{1k}a_{k3}$ bude nenulový, což ale nastane jen tehdy, když oba členy a_{1k} i a_{k3} budou nenulové. To ale znamená, že existuje hrana mezi prvním a k-tým vrcholem a taky hrana mezi k-tým a třetím vrcholem, tedy existuje cesta délky 2, která spojuje první a třetí vrchol.

Tyto myšlenky můžeme ilustrovat na celé řadě příkladů. Uvažme například následující graf a příslušnou matici sousednosti, které zobrazují přímé letecké spoje mezi Brnem, Edinburghem, Lisabonem, Mnichovem a Paříží.



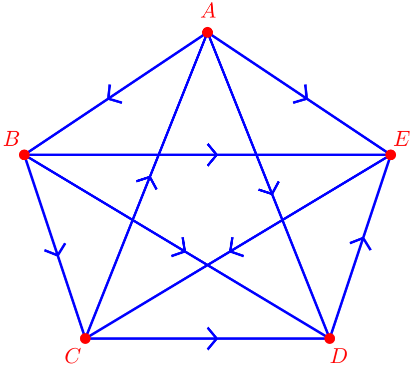
$$A = \begin{array}{c} \\ B \\ E \\ L \\ M \\ P \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B & E & L & M & P \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nyní můžeme například snadno odpovědět na otázku, kolik existuje různých letů z Brna do libovolného města s dvěma přestupy:

$$A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 4 & 4 & 4 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 10 & 11 \\ 9 & 9 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

Odpověď dává první řádek naší matice. Vidíme, že například z Brna do Edinburghu existují čtyři různé cesty s dvěma přestupy a do Paříže je jich už devět. Která z těchto cest by byla nejkratší nebo nejrychlejší je již ale jiný příběh (i když stále z teorie grafů).

Představme si například pětici hráčů, kteří hrají turnaj ve stylu každý s každým. Výsledky můžeme snadno zachytit pomocí grafu, kdy hranu od prvního hráče k druhému vedeme tehdy, když první druhého porazí. Dostaneme tak například následující graf a příslušnou matici sousednosti



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dejme tomu, že chceme seřadit hráče podle počtu jejich vítězství. Pro tento účel nám stačí samozřejmě jen sečíst, kolik jedniček je v každém řádku. Tento výpočet můžeme také nahradit následujícím násobením:

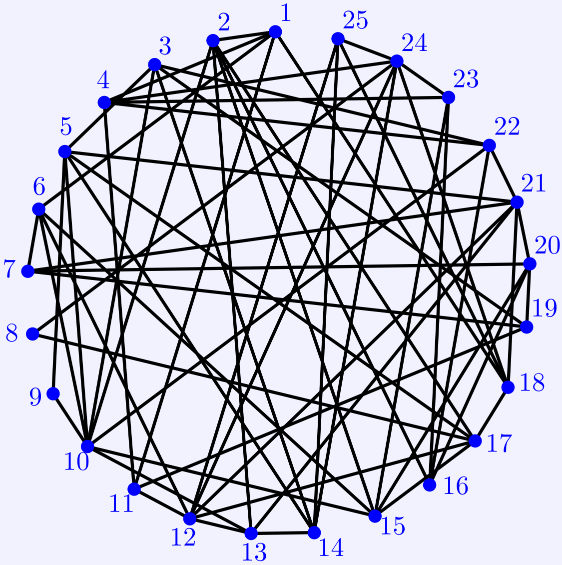
$$A \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že někteří hráči (A a B, C a D) mají stejný počet výher. Pokud bychom chtěli rozhodnout, který z nich je lepší, můžeme například použít kritérium nepřímých vítězství, tj. kolik hráčů porazili hráči, které daný hráč porazil. Ve slovech matic (po předchozím příkladu je snad jasné proč) dostaneme

$$(A + A^2) \cdot J = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sociální sítě

Kdo je nejvýznamnější postavou v této síti vztahů?



$$
\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
$$

Leslieho model

Příklad

Uvažujme například populaci hmyzu rozdělenou na tři životní etapy: mláďata, mladistvé a dospělé jedince, přičemž každá životní etapa trvá jeden rok. Pravděpodobnost přežití mláďat je 50 % a nerozmnožují se. Mladiství mají pravděpodobnost přežití 25 % a každý z nich má průměrně čtyři mláďata. Dospělí jedinci mají pravděpodobnost přežití 0 % a každý z nich má průměrně tři mláďata. Předpokládejme, že máme 100 samiček, přičemž 40 jsou mláďata, 40 jsou mladiství a 20 dospělí. Jak se bude taková populace samiček vyvíjet v čase?

Po jednom roce bude počet mláďat

$$40 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 220.$$

Počet mladistvých bude počet mláďat, která přežijí, tj.

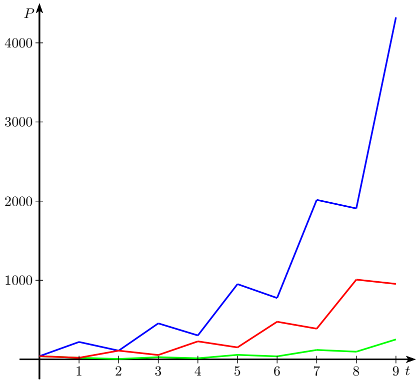
$$40 \cdot 0{,}5 = 20$$

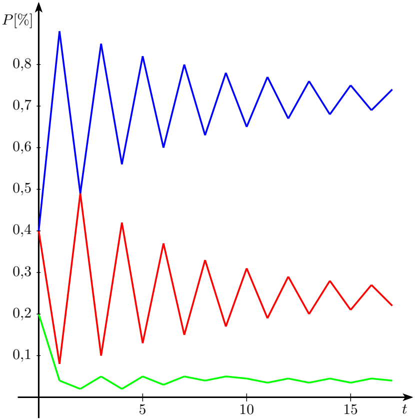
a podobně pro dospělé

$$40 \cdot 0{,}25 = 10.$$

Všechny tyto výpočty můžeme snadno zapsat jednou maticovou rovnicí

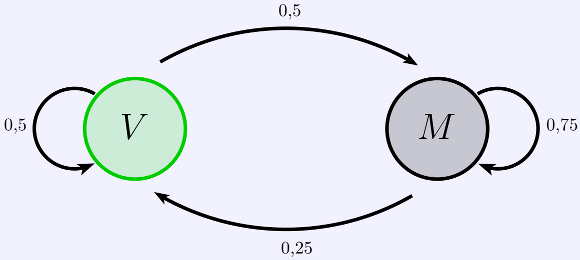
$$L \cdot \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_1 \, .$$


P
4000
3000
2000
1000
1
2
3
4
5
6
7
8
9
t


P[%]
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
5
10
15
t

Stěhování

Předpokládejme, že populace se stěhuje mezi dvěma regiony, např. venkovem a městem, podle následujícího schématu. Každý rok se 50% obyvatel venkova přestěhuje do měst a 25% obyvatel měst se přestěhuje na venkov. Je-li například na začátku polovina obyvatel ve městě a tento vzor migrace bude pokračovat, jak bude vypadat stav po dvou letech? A jak bude rozdělení obyvatelstva vypadat z dlouhodobého hlediska? Vyprázdní se venkov? Nebo se situace stabilizuje tak, že část obyvatel bude žít ve městě a část na venkově?



Řešení:

$$v_{k+1} = 0{,}5v_k + 0{,}25m_k$$
$$m_{k+1} = 0{,}5v_k + 0{,}75m_k$$

$$\begin{pmatrix} v_{k+1} \\ m_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_k \\ m_k \end{pmatrix}$$
$$\vec{p}_{k+1} = T \cdot \vec{p}_k$$

$$\vec{p}_{k+2} = T \cdot \vec{p}_{k+1} = T \cdot (T \cdot \vec{p}_k) = T^2 \cdot \vec{p}_k$$

$$\vec{p}_2 = T^2 \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}3125 \\ 0{,}625 & 0{,}6875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}34375 \\ 0{,}65625 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = T \cdot \vec{p}$$

Markovův řetězec

Markovův řetězec je náhodný proces, který popisuje posloupnost možných událostí. Pro tento proces platí, že pravděpodobnost přechodu procesu do následujícího stavu závisí pouze na současném stavu.

Matice přechodu

Matici, která obsahuje v každém sloupci (řádku) pravděpodobnosti přechodu od jednoho stavu k druhému, nazveme *maticí přechodu* daného Markovova řetězce.

Stacionární distribuce

Je-li T matice přechodu daného Markovova řetězce a existuje-li vektor $\vec{v}$ takový, že

$$\vec{v} = T \cdot \vec{v}$$

nazveme vektor $\vec{v}$ *stacionární distribucí (rovnovážným stavem)* Markovova řetězce.