Lineární algebra

Soustavy rovnic

Petr Liška

Masarykova univerzita

27.11.2024

Soustavy lineárních rovnic

Definice

Soustavou (systémem) k lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \quad \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k. \end{aligned}$$

Je-li $b_1 = b_2 = \cdots = b_k = 0$, nazývá se takováto soustava *homogenní*. *Řešením* soustavy je každá uspořádaná n-tice $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ takových čísel t_1, t_2,..., t_n, která dané soustavě vyhovuje.

Pro každou soustavu vždy nastane právě jedna z následujících možností:

- Soustava rovnic má *právě jedno řešení.*
- Soustava rovnic má *nekonečně mnoho řešení.*
- Soustava rovnic nemá *žádné řešení.*

Maticí soustavy nazýváme matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}.$$

Rozšířenou maticí soustavy nazýváme matici

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}.$$

Soustavu pak můžeme zapsat maticově

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}\,,$$

kde $\vec{x}$ je vektor neznámých a $\vec{b}$ je vektor pravých stran. Píšeme také

$$A \cdot X = B\,.$$

Hodnost matice

Definice

Hodnost matice A je číslo, které je rovno maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků. Označujeme ji $h(A)$.
Je-li A čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž hodnost je rovna n, nazýváme ji *regulární* maticí. Je-li $h(A) < n$, nazývá se taková matice *singulární*.

Definice

Řekneme, že A je *matice ve schodovitém tvaru*, jestliže v matici A každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí řádek.

Věta

Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

Hodnost a soustavy rovnic

Věta (Frobeniova věta)

Soustava lineárních rovnic má řešení, právě když je hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.

Věta

Soustava k lineárních rovnic o n neznámých má jediné řešení, jestliže je hodnost h matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy a navíc je rovna počtu neznámých n, tedy $h = n$.

Věta

Soustava k lineárních rovnic o n neznámých má nekonečně mnoho řešení, jestliže se hodnost h matice soustavy rovná hodnosti rozšířené matice a navíc je tato hodnost menší než počet neznámých, tj. $h < n$. V tomto případě lze $n - h$ neznámých volit libovolně.

Jak soustavu vyřešit?

Gaussova eliminační metoda

Systém reprezentujeme pomocí matice.

Matici převedeme do schodovitého tvaru pomocí tzv. *elementárních řádkových úprav*:

- zaměna pořadí řádků,
- vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem,
- přičtením násobku libovolného řádku k libovolnému řádku,
- vypuštění řádku, který je složen ze samých nul, je násobkem jiného řádku nebo lineární kombinací jiných řádků.

Zpětným dosazením vypočítáme jednotlivé neznámé.

Strategie převodu matice na schodovitý tvar

V prvním kroku převedeme matici do tvaru, kdy má na pozici $(1, 1)$ (první řádek a první sloupec) nenulový prvek a_{11} a ostatní prvky v prvním sloupci jsou nulové, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \end{pmatrix},$$

kde na pozici $\star$ stojí nějaké prvky (mohou být nenulové i nulové). Je-li $a_{11} \neq 0$, dosáhneme tohoto tvaru například tak, že první řádek opíšeme, a ke druhému řádku přičteme vhodný násobek prvního řádku tak, aby na pozici $(2, 1)$ vznikla nula. Podobně postupujeme s ostatními řádky.

V druhém kroku chceme „vytvořit“ nuly ve druhém sloupci pod prvkem $\boxed{\star}$. Usilujeme tedy o tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \boxed{\star} & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix}.$$

První dva řádky opíšeme a poté postupujeme obdobně jako v prvním kroku: od třetího řádku odečteme vhodný násobek druhého řádku, totéž pro čtvrtý řádek atd. Postupnými úpravami převedeme matici na schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \star \end{pmatrix}.$$

Příklad

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 &= -2\\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 6x_4 &= -2\\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 6\\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -5 & 1 & -2\\ 3 & 1 & -4 & 6 & -2\\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -5 & 1 & -2\\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4\\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -5 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1\\ 0 & -5 & 11 & 3 & 4\\ 0 & 4 & -6 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -5 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9\\ 0 & 0 & -18 & 18 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 26 & -17 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 9 \end{array}\right)$$

$$9x_4 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x_4 = 1$$

$$26x_3 - 17x_4 = 9 \quad \Longrightarrow \quad 26x_3 - 17 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 1$$

$$x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 + 3 - 4 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = -2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 + 4 - 5 + 1 = -2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -2$$

$$(-2, 2, 1, 1)$$

Příklad

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 6x_5 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 6x_5 &= -1 \end{aligned}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -6 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$-2x_4 = -2 \quad \Longrightarrow \quad x_4 = 1$$

$$4x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x_3 - 2 + 6x_5 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x_3 = t,\ t \in \mathbb{R},\ x_5 = \frac{2-4t}{6}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 + x_2 + t + 1 = 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad x_2 = s,\ s \in \mathbb{R},\ x_1 = -t - s$$

$$\left(-t - s, s, t, 1, \frac{2-4t}{6}\right)$$

Leontiefův model

Ekonomika regionu se skládá ze tří odvětví: průmysl, zemědělství a služby. Každý sektor produkuje komodity a zdrojem jeho příjmů je prodej těchto komodit, přičemž každý sektor potřebuje vstupní komodity (od sebe i ostatních sektorů):

		výstupy		
		Průmysl	Zemědělství	Služby
	Průmysl	0,40	0,20	0,20
vstupy	Zemědělství	0,20	0,40	0,20
	Služby	0,20	0,10	0,40

Kromě toho existují externí poptávka v hodnotě 30, 30 a 10 miliard na průmysl, zemědělství a služby. Jak velká musí být produkce jednotlivých odvětví?

Řešení:

$$
\begin{aligned}
0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 + 30 &= x_1\\
0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}2x_3 + 30 &= x_2\\
0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}4x_3 + 10 &= x_3
\end{aligned}
$$

$$
\left(\begin{array}{rrr|r} -0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 & -30\\ 0{,}2 & -0{,}6 & 0{,}2 & -30\\ 0{,}2 & 0{,}1 & -0{,}6 & -10 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 & -30\\ 0 & -1{,}6 & 0{,}8 & -120\\ 0 & 0 & -21{,}6 & -1560 \end{array}\right)
$$

$$
x_1 = 61{,}11, \qquad x_2 = 111{,}11, \qquad x_3 = 72,22
$$

Proč i teorie má smysl?

Jednoduchý makroekonomický model hospodářské politiky

Uvažme jednoduchý model

$$Y = C + I + G + X - M,$$

- kde Y je hrubý domácí produkt,
- C je spotřeba domácností, pro kterou platí
  $$C = c(Y - T), \qquad 0 < c < 1,$$
  kde $T = tY$, $0 < t < 1$, jsou daňové příjmy,
- I označuje investiční výdaje,
- G jsou celkové vládní výdaje, pro které platí
  $$G = T + D,$$
  kde D značí deficit státního rozpočtu,
- X je celková hodnota exportu,
- M je velikost importu, pro kterou platí
  $$M = mY, \qquad 0 < m < 1\,.$$

Podle Tinbergena má být počet cílů, které si vláda vytyčí, roven počtu nástrojů, které se mají použít. Tedy například má smysl následující otázka. Jak velký rozpočtový deficit můžeme očekávat pokud chceme dosáhnout dané úrovně hrubého národního produktu? Má Tinbergenovo tvrzení nějaké matematické zdůvodnění?

Řešení: Náš příklad je jednoduchý (i tak už jsme museli zavést spousty ekonomických proměnných). Pokud si situaci rozmyslíme, tak vidíme, že máme jen jednu lineární rovnici.

$$Y = \frac{1}{1 - c(1-t) - t + m}(I + X + D)$$

$$D = (1 - c(1-t) - t + m)Y - (I + X)$$

Aby byla rovnice jednoznačně řešitelná, můžeme mít jen jednu neznámou. Obecně můžeme říct, že Tinbergenovo tvrzení má smysl.