Matematika pro ekonomy

(podpůrný text pro BPM_MAEK)

Petr Liška

12. září 2024

Úvod

Následující text není v žádném případě úplně samonosný. Slouží spíše jako podklad k přednášce (ačkoliv řešené početní příklady jsou zde záměrně jiné) a jako zdroj aplikačních příkladů pro procvičení. Jsou zde obsaženy všechny důležité informace, ale ne všechna vysvětlení a komentáře, proto se nehodí jako jediný zdroj pomocí kterého by bylo vše možné pochopit.

V textu jsou často odkazy na různé knihy a články, které jsou hlavně prakticky zaměřeny. Velká část z nich vyžaduje hodně trpělivosti a případně i znalosti, které zde nejsou obsaženy. Slouží hlavně jako ukázka praktického a reálného použití zde představených matematických metod. Aplikace v textu jsou jinak spíše modelové, jelikož výpočet, který by obsahoval reálná data je většinou nutné svěřit kvůli jeho náročnosti počítači (ale principy jsou stejné).

Obsah

Kapitola 1

Posloupnosti a řady

Definice 1.1. *Posloupnost* je předpis a, který každému prvku n množiny $\mathbb{N}$ přiřadí právě jedno číslo a_n z $\mathbb{R}$. Hodnotu a_n nazýváme *n-tý člen posloupnosti* a celou posloupnost pak zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nebo zkráceně $\{a_n\}$.

Je možné mít i konečnou posloupnost, pokud v předchozí definici uvážíme místo množiny $\mathbb{N}$ její podmnožinu D, která obsahuje všechna přirozená čísla menší nebo rovno nějaké pevně dané číslo.

Posloupnost obvykle zadáváme

- vzorcem pro n-tý člen;
- rekurentně;
- (výčtem členů).

Základní vlastnosti posloupností

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá

- *rostoucí*, jestliže $a_n < a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- *klesající*, jestliže $a_n > a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- *nerostoucí*, jestliže $a_n \geq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- *neklesající*, jestliže $a_n \leq a_{n+1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- *shora ohraničená*, jestliže existuje $U \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq U$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- *zdola ohraničená*, jestliže existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \geq U$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- *ohraničená*, jestliže je ohraničená shora i zdola.

Definice 1.2. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *aritmetická*, jestliže $\exists d \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Číslo d se nazývá *diference*.

Pro n-tý člen platí

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Pro libovolná r, $s \in \mathbb{N}$ platí

$$a_s = a_r + (s-r)d.$$

Značí-li s_n součet prvních n členů posloupnosti, potom platí

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k+1} + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

což můžeme též napsat jako

$$s_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_{n-k} + \cdots + a_2 + a_1.$$

Chytře sečteme a seskupíme

$$2s_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{k+1} + a_{n-k}) + \cdots + (a_n + a_1)$$

a ještě chytřeji vyjádříme

$$a_{k+1} = a_1 + kd\,, \qquad a_{n-k} = a_1 + (n-k-1)d = a_1 + (n-1)d - kd = a_n - kd.$$

A pak už je jasné, že

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Aplikace 1.3. Zákazník si koupil zboží za 24 000 Kč a zavázal se jej splatit ve 12 měsíčních splátkách po 2 000 Kč plus 1,5 % z nesplacené částky. Jaká je např. desátá splátka a kolik zaplatí celkem?

Pro zodpovězení této otázky si můžeme představit několik prvních splátek:

- První splátka: $2\,000 + 0{,}015 \cdot 24\,000 = 2\,360\,\text{Kč}$
- Druhá splátka: $2\,000 + 0{,}015 \cdot 22\,000 = 2\,330\,\text{Kč}$
- Třetí splátka: $2\,000 + 0{,}015 \cdot 20\,000 = 2\,300\,\text{Kč}$

Můžeme si tedy všimnout, že splátky v jednotlivých měsících tvoří členy aritmetické posloupnosti s diferencí $d = -30\,\text{Kč}$. Tedy desátá splátka bude

$$a_{10} = a_1 + (10-1)d = 2\,360 + 9(-30) = 2\,090\,\text{Kč}$$

a celkově zaplacená částka je pak

$$s_{12} = \frac{12}{2}(2\,360 + 2\,030) = 26\,340\,\text{Kč}.$$

Definice 1.4. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *geometrická*, jestliže $\exists q \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Číslo q se nazývá *kvocient.*

Pro n-tý člen platí

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Pro libovolná r, $s \in \mathbb{N}$ platí

$$a_s = a_r \cdot q^{s-r}.$$

Značí-li s_n součet prvních n členů posloupnosti, potom můžeme psát

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} \\ q s_n &= a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n \end{aligned}$$

Odečtením druhého vyjádření od prvního dostaneme

$$s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

a odtud

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Je-li $q = 1$ nemůžeme v předchozí kroku provést dělení. Ale v tomto případě se jedná o poměrně speciální (a nudnou) konstatní posloupnost a dostaneme

$$s_n = n \cdot a_1, \qquad q = 1.$$

Present value

Aplikace 1.5. Jak velké množství peněz je nutné investovat, abychom za čtyři roky získali 12 000 Kč, je-li roční úroková míra 10 %?

Jelikož víme, že částka P_n, kterou získáme při složeném uročení čátky P_0 a dané úrokové míře i, je dána vztahem

$$P_n = P_0(1+i)^n.$$

Pak můžeme i ručit jakou částku P_0 musíme investovat, abychom za n let obdrželi částku P_n:

$$P_0 = \frac{P_n}{(1+i)^n}.$$

Pro naše konkrétní hodnoty dostáváme

$$P_0 = \frac{12\,000}{(1+0{,}1)^4} = 8\,196{,}16\,\text{Kč}.$$

Obecně říkáme, že tato částka P_0 je současnou hodnotu (present value) částky P_n za n let.

Tento koncept se požívá (jako jeden z mnoha) pro ohodnocení výhodnosti projektů.

Můžeme se například ptát, je-li výhodná investice 75 000 Kč, pokud příštích 5 let získáme každý rok 20 000 Kč a roční úroková míra je 12 %.

Pro vyřešení si spočítáme současnou hodnotu jednotlivých budoucích plateb:

- PV 20 000 Kč za první rok je $\frac{20\,000}{1{,}12} = 17\,857{,}1\,\text{Kč}$
- PV 20 000 Kč za dva roky je $\frac{20\,000}{(1{,}12)^2} = 15\,943{,}9\,\text{Kč}$
- PV 20 000 Kč za tři roky je $\frac{20\,000}{(1{,}12)^3} = 14\,235{,}6\,\text{Kč}$
- PV 20 000 Kč za čtyři roky je $\frac{20\,000}{(1{,}12)^4} = 12\,710{,}4\,\text{Kč}$
- PV 20 000 Kč za pět let je $\frac{20\,000}{(1{,}12)^5} = 11\,348{,}5\,\text{Kč}$

Současná hodnota projektu je tedy

$$17\,857{,}1 + 15\,943{,}9 + 14\,235{,}6 + 12\,710{,}4 + 11\,348{,}5 = 72\,095{,}5\,\text{Kč}$$

a vidíme, že výhodný není.

1.1 Limita posloupnosti

Proveďme následující experiment. Uvažme, že máme částku P_0 a roční úrokovou míru $i \in (0,1]$.

- po jednom roce dostaneme
$$P_1 = P_0 + iP_0 = P_0(1+i)$$
- po dvou letech dostaneme
$$P_2 = P_1 + iP_1 = P_1(1+i) = P_0(1+i)(1+i) = P_0(1+i)^2$$
- a podobně po n letech
$$P_n = P_0(1+i)^n$$

Co se stane, když dostaneme čtvrtinu úroku každého čtvrt roku?

$$P_{\frac{1}{4}} = P_0\left(1+\frac{i}{4}\right), \ldots, P_1 = P_0\left(1+\frac{i}{4}\right)^4, \ldots, P_n = P_0\left(1+\frac{i}{4}\right)^{4n}$$

Pro jednoduchost uvažme, že $i = 1$ a $n = 1$. Co se stane, když budeme úročit každý měsíc, týden, hodinu, minutu...?

m	$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$	částka
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$	$2P_0$
4	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$	$2{,}44141P_0$
12	$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$	$2{,}61304P_0$
365	$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$	$2{,}71457P_0$
8760	$\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760}$	$2{,}71813P_0$
525600	$\left(1+\frac{1}{525600}\right)^{525600}$	$2{,}71828P_0$

A co se stane, když budeme jednotku času stále zmenšovat?

$$P_n = P_0\left(1+\frac{1}{\frac{m}{i}}\right)^{\frac{m}{i}it} = P_0\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]^{in} \underset{k\to\infty}{=} P_0\mathrm{e}^{in}.$$

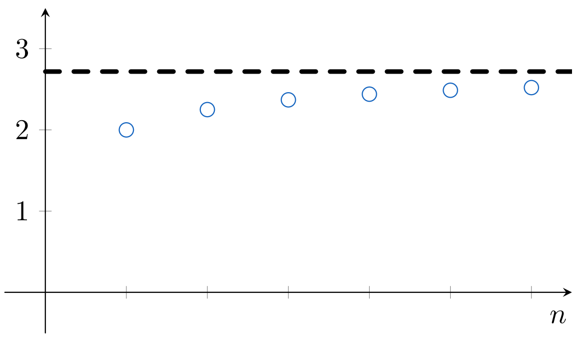
Definice 1.6. Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}$ a číslo $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* A, jestliže se k číslu A můžeme s členy posloupnosti přiblížit libovolně blízko tím, že vezmeme hodnoty n dostatečně velké.

Pokud má posloupnost $\{a_n\}$ limitu, říkáme, že *konverguje*, a značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, případně $a_n \to A$ pro $n \to \infty$.

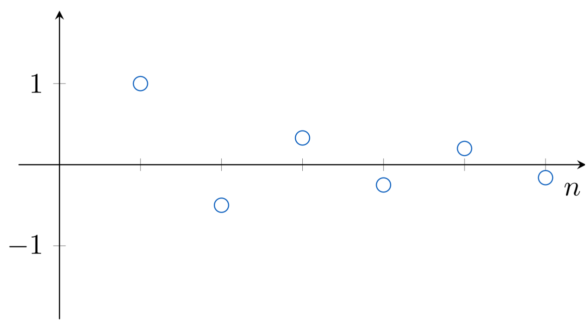
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu $+\infty$, jestliže členy posloupnosti můžeme udělat libovolně velké tím, že vezmeme dostatečně velké n. Značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Podobně definujeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Pokud má posloupnost $\{a_n\}$ limitu $+\infty$ nebo $-\infty$, říkáme, že posloupnost *diverguje*.

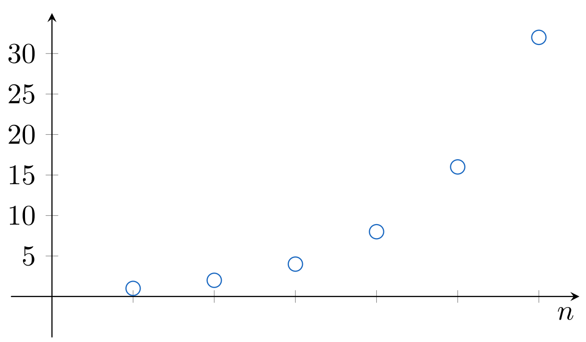
Jestliže posloupnost nekonverguje ani nediverguje, řekneme, že *osciluje*.



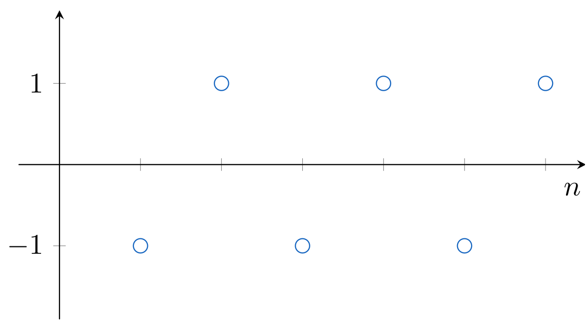
$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$



$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$



$a_n = 2^{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$



$a_n = (-1)^n$, limita neexsituje

Definice 1.7. Množinu $\mathbb{R}^\star = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, která je uspořádaná tak, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí $-\infty < x < +\infty$, nazýváme rozšířenou množinou reálných čísel.

Je-li $c \in \mathbb{R}$, $0 < k < +\infty$, $-\infty < z < 0$ zavádíme

1. $$c + (\pm\infty) = (\pm\infty) + c = \pm\infty,$$
$$+\infty + (+\infty) = +\infty, \qquad -\infty + (-\infty) = -\infty$$

2. $$k \cdot (\pm\infty) = \pm\infty, \qquad z \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$$
$$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty, \quad -\infty \cdot (-\infty) = +\infty, \quad +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$$

3. $$\frac{c}{\pm\infty} = 0$$

Aplikace 1.8. Pokud utratíme peníze za zboží a služby, tak ti, kteří je obdrží, část z nich opět utratí. Ti, kteří obdrží dvakrát utracené peníze, z nich část opět utratí atd.

Uvažme, že vláda zahájí tento proces tím, že utratí částku D Kč. Každý příjemce pak utratí $100c\,\%$ a uspoří $100s\,\%$, přičemž $c + s = 1$.

a) Jak velké jsou celkové výdaje S_n po n krocích?

b) Jaký je význam $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$?

a)
$$S_n = D + cD + c(cD) + \cdots + c^{n-1}D = D\frac{1-c^n}{1-c}\,.$$

b)
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} D\frac{1-c^n}{1-c} = \frac{D}{1-c} = \frac{D}{s}$$

Je-li např. $c = 0{,}8$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 5D$.

1.2 Nekonečná řada

Definice 1.9. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{nebo} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou.* Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \ldots,$$

nazýváme *posloupnost částečných součtů* této řady.
Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má součet s. Neexistuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Věta 1.10 (Nutná podmínka konvergence)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Jediná řada, kterou budeme chtít umět sečíst, je řada geometrická, tj. řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$$

Nechť $q = 1$, $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} n a_1 = \pm\infty$. Nechť $q = -1$, pak řada je $a_1 + (-a_1) + \cdots$ a platí

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{pro sudé}\, n \\ a_1 & \text{pro liché}\, n \end{cases}$$

tedy $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje. Pro $|q| \neq 1$

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}\,.$$

Pro $q > 1$ je $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, pro $q < -1$ tato limita neexistuje a pro $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}\,.$$

Kapitola 2

Diferenciální počet

2.1 Funkce a její vlastnosti

Definice 2.1. Nechť jsou dány neprázdné množiny $D \subseteq \mathbb{R}, H \subseteq \mathbb{R}$. Předpis f, který každému $x \in D$ přiřazuje právě jedno $y \in H$, nazýváme *funkcí* jedné proměnné. Tuto funkci označujeme

$$y = f(x).$$

Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f a značí se $D(f)$, množina H se nazývá *obor hodnot* funkce f a značí se $H(f)$.

Definice 2.2. *Grafem* funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ je množina bodů

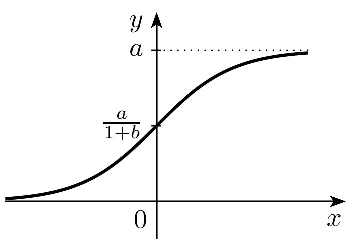
$$G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in D(f)\}.$$

Příklad 2.3 (*Typické (netypické) funkce v ekonomii a sociologii*)**.**

Logistická funkce (saturační proces)

$$y = \frac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-cx}}$$

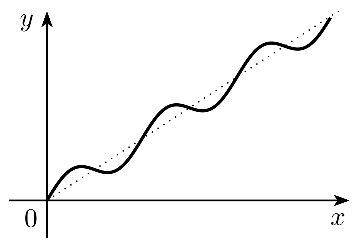
$$a,\ b,\ c > 0$$



Trendová funkce s periodickými fluktuacemi

$$y = a + bx + c\sin(dx)$$

$$a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}$$

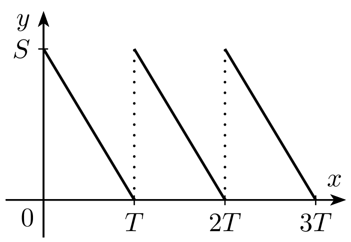


„Zásobovací“ funkce

$$y = iS - \frac{S}{T}x$$

$$(i-1)T \le x \le iT$$

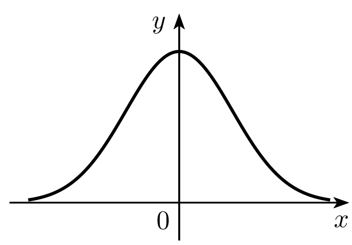
$$S, T > 0,\ i = 1, 2, \ldots$$



Gaussova funkce

$$y = a\mathrm{e}^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$$

$$a,\ b,\ c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0$$



Definice 2.4. Funkce f se nazývá *ohraničená*, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$, takové, že $|f(x)| \le K$ pro každé $x \in D(f)$.

Řekneme, že funkce f je *sudá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = f(x)$ (graf je souměrný podle osy y).

Řekneme, že funkce f je *lichá*, jestliže pro každé $x \in D(f)$ platí $-x \in D(f)$ a $f(-x) = -f(x)$ (graf je souměrný podle počátku).

Funkce f se nazývá *periodická* s periodou $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, jestliže platí, že pro každé $x \in D(f)$ je také $x \pm p \in D(f)$ a $f(x+p) = f(x-p) = f(x)$. Základní perioda funkce je nejmenší prvek množiny všech period této funkce.

Definice 2.5. Nechť je dána funkce $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$ a interval $I \subseteq D(f)$. Pak funkci f nazveme *rostoucí na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkci f nazveme *klesající na intervalu* I, jestliže pro každá dvě $x_1,\ x_2 \in I$ taková, že $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkce, která je rostoucí nebo klesající, se nazývá *ryze monotonní.*

Definice 2.6. Funkce f se nazývá *prostá*, právě když pro všechna $x_1, x_2 \in D(f)$ platí: je-li $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definice 2.7. Nechť $u\colon A \to B$ a $f\colon B \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Pak funkce $F\colon A \to \mathbb{R}$ daná předpisem $y = f(u(x))$ se nazývá *složená funkce.* Funkce u se nazývá *vnitřní* složkou, funkce f *vnější* složkou složené funkce F.

Definice 2.8. *Inverzní funkcí* k prosté funkci f je funkce f^{-1}, pro kterou platí, že $D(f^{-1}) = H(f)$ a ke každému $y \in D(f^{-1})$ je přiřazeno právě jedno $x \in D(f)$ takové, že $f(x) = y$.

Věta 2.9. *Inverzní funkcí k funkci f rostoucí (klesající) na množině $D(f)$ je rostoucí (klesající) funkce na množině $H(f)$.*

Definice 2.10. Buď $x \in \mathbb{R}$. Nechť P je koncový bod oblouku na jednotkové kružnici, jehož počáteční bod je $[1,0]$ a jehož délka je $|x|$; přitom oblouk je od bodu $[1,0]$ k bodu P orientován v protisměru, resp. ve směru chodu hodinových ručiček podle toho, zda $x \geq 0$, resp. $x < 0$. Pak první souřadnici bodu P nazýváme $\cos x$ a druhou souřadnici $\sin x$. Dále definujme

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ nazýváme funkce *goniometrické.*

Některé důležité vztahy:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1, & \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{cotg} x &= 1, \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x, & \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2}, & \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2}. \end{aligned}$$

Definice 2.11. Inverzní funkce k funkci $\sin x$ definované na $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ se označuje $\arcsin x$.

Inverzní funkce k funkci $\cos x$ definované na $[0, \pi]$ se označuje $\arccos x$.

Inverzní funkce k funkci $\operatorname{tg} x$ definované na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ se označuje $\operatorname{arctg} x$.

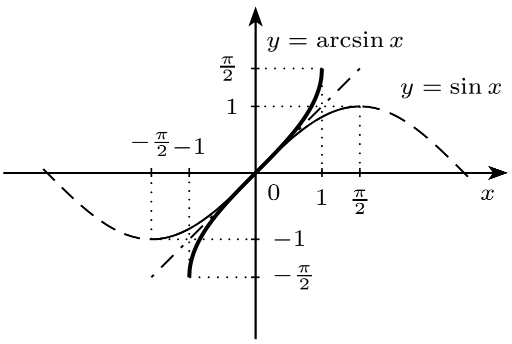
Inverzní funkce k funkci $\operatorname{cotg} x$ definované na $(0, \pi)$ se označuje $\operatorname{arccotg} x$.

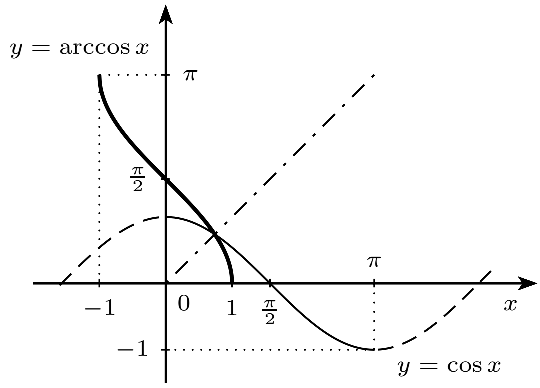
Funkce $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$ a $\operatorname{arccotg} x$ nazýváme *cyklometrické funkce.*

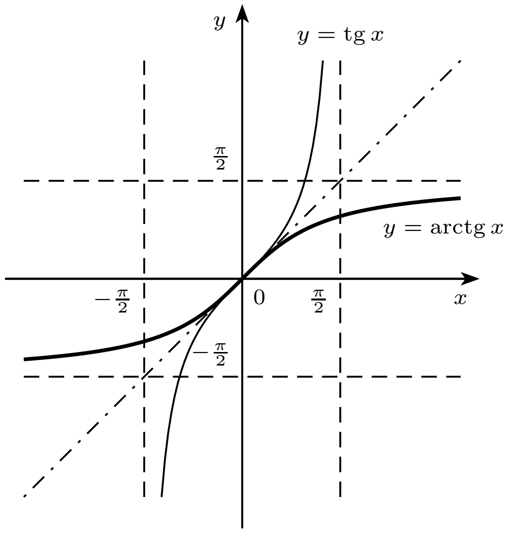
Věta 2.12. *Cyklometrické funkce mají následující vlastnosti.*

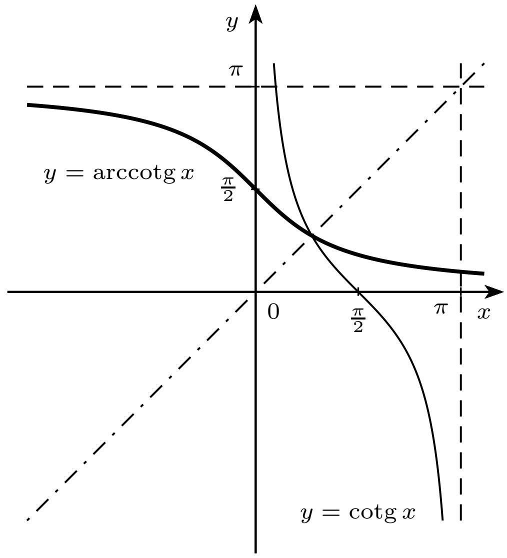
1. *Funkce* $\arcsin x$ *a* $\operatorname{arctg} x$ *jsou rostoucí, funkce* $\arccos x$ *a* $\operatorname{arccotg} x$ *jsou klesající.*

2. *Funkce* $\arcsin x$ *a* $\operatorname{arctg} x$ *jsou liché.*









Definice 2.13. Funkci $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad \text{kde} \qquad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

nazýváme *polynomem.* Čísla a_i se nazývají *koeficienty* polynomu. Je-li $a_n \neq 0$, pak číslo $n \in \mathbb{N}$ nazveme *stupněm* polynomu.
Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ se nazývá *kořen polynomu* P, jestliže

$$P(\alpha) = 0.$$

Číslo α je *k-násobným kořenem* polynomu P, existuje-li polynom Q takový, že

$$P(x) = (x - \alpha)^k Q(x),$$

a α není kořenem polynomu Q, tj. $Q(\alpha) \neq 0$. Číslo $k \in \mathbb{N}$ se pak nazývá násobnost kořene α polynomu P.

Věta 2.14 (Základní věta algebry)**.** *Polynom P stupně n má nad komplexním oborem $\mathbb{C}$ právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik je jeho násobnost.*

Definice 2.15. Buďte P, Q nenulové polynomy. Funkce

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se nazývá *racionální lomená funkce.* Tuto funkci nazveme *ryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}P < \mathrm{st}Q$, a *neryze lomenou*, platí-li $\mathrm{st}P \geq \mathrm{st}Q$.

2.2 Limita a spojitost

Definice 2.16 („Naivní“ definice)**.** Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu L, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x_0, ale různé od x_0. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Funkce $y = f(x)$ má v bodě x_0 limitu rovnu ∞, jestliže hodnoty funkce $f(x)$ můžeme udělat libovolně velké tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně blízké hodnotě x_0, ale různé od x_0. Zapisujeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

a říkáme, že funkce má *ve vlastním bodě nevlastní limitu.*

Funkce $y = f(x)$ má v bodě ∞ limitu L, jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně velké. Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

Říkáme, že funkce má v *nevlastním bodě vlastní limitu.*

Funkce $y = f(x)$ má v bodě ∞ limitu ∞, jestliže hodnoty funkce $f(x)$ můžeme udělat libovolně velké tak, že vezmeme hodnoty x dostatečně velké. Zapisujeme

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Říkáme, že funkce má v *nevlastním bodě nevlastní limitu.*

Analogicky můžeme popsat i limity v bodě $-\infty$ a s hodnotou $-\infty$.

Pro ty, kteří vyžadují přesnost

Definice 2.17. Nechť x_0, $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Pak interval $\mathcal{O}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ nazveme *okolím* bodu x_0.
Buď $a \in \mathbb{R}$. Pak interval $\mathcal{O}(\infty) = (a, \infty)$ nazveme *okolím bodu* ∞ a interval $\mathcal{O}(-\infty) = (-\infty, a)$ okolím bodu $-\infty$.

Definice 2.18. Nechť x_0, $L \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$. Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 *limitu* rovnu číslu L a píšeme $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Věta 2.19. *Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.*

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 limitu zleva rovnu L, píšeme

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L,$$

jestliže se s hodnotami funkce $f(x)$ můžeme libovolně přiblížit číslu L tak, že vezmeme hodnoty x menší než x_0 a dostatečně blízké hodnotě x_0. Analogicky definujeme i limitu zprava a nevlastní limity.

Věta 2.20.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L\,.$$

Věta 2.21. *Nechť existují vlastní limity* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$. *Pak platí:*

a) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$,

b) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$,

c) Je-li $L_2 \neq 0$, *pak* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$,

d) $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x \to x_0} f(x)|$.

Jak se počítá se symbolem ∞? Platí

$$\infty + \infty = \infty, \quad \infty \cdot \infty = \infty, \quad \frac{1}{\pm\infty} = 0, \quad \frac{1}{+0} = +\infty, \quad \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Některé výrazy jsou nejednoznačné a určení jejich hodnoty je náročnější. Jedná se o výrazy

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Příklad 2.22. Proč se při růstu objevuje konstanta e**?**
Uložme do banky částku P_0. Při úroku 8 % dostaneme po roce částku P_1

$$P_1 = P_0 + 0{,}08P_0 = P_0(1 + 0{,}08),$$

analogicky po t letech

$$P_t = P_0(1 + 0{,}08)^t.$$

Pokud budeme úročit čtvrletně, dostaneme každého čtvrt roku 2 %, tj. po roce

$$P_1 = P_0(1 + 0{,}02)^4$$

a po t letech

$$P_t = P_0(1 + 0{,}02)^{4t}.$$

Můžeme úročit každý měsíc, týden, den, atd. a libovolnou úrokovou mírou, dostaneme tak vztah

$$P_t = P_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Uvažme nyní úrok ve výši 100 % , tj. $r = 1$, a podívejme se, co se děje s naší částkou po roce, když úročíme čím dál častěji:

m	$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$	částka
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1$	$2P_0$
4	$\left(1+\frac{1}{4}\right)^4$	$2{,}44141P_0$
12	$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$	$2{,}61304P_0$
365	$\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}$	$2{,}71457P_0$
8760	$\left(1+\frac{1}{8760}\right)^{8760}$	$2{,}71813P_0$
525600	$\left(1+\frac{1}{525600}\right)^{525600}$	$2{,}71828P_0$

Vypadá to tedy, že částka neporoste do nekonečna, což nás vede k následující definici

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

Vrátíme-li se k vzorci pro výpočet získané částky

$$P_t = P_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt},$$

pak zavedením substituce $m = rn$ dostaneme

$$P_0\left(1 + \frac{r}{rn}\right)^{rnt} = P_0\left[\left(1 + \frac{r}{rn}\right)^n\right]^{rt} = P_0\mathrm{e}^{rt}.$$

Definice 2.23. Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 *spojitá*, jestliže je limita funkce v tomto bodě rovna funkční hodnotě v tomto bodě, tj.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Analogicky se definuje spojitost zprava/zleva.

Definice 2.24. Nechť f je funkce a $I \subseteq D(f)$ je interval. Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu I, jestliže je spojitá v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Patří-li navíc levý (pravý) koncový bod do I, je v něm funkce spojitá zprava (zleva).

Věta 2.25 (Weierstrassova věta)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak je na tomto intervalu ohraničená a nabývá zde své největší a nejmenší hodnoty.*

Věta 2.26 (Bolzanova věta)**.** *Nechť f je spojitá na intervalu $I = [a, b]$. Pak na tomto intervalu nabývá všech hodnot mezi svou největší a nejmenší hodnotou.*

Důsledek 2.27. *Je-li funkce f spojitá na intervalu $I = [a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$, pak existuje bod $c \in (a, b)$ takový, že $f(c) = 0$.*

Spojité (tam, kde jsou definované) jsou všechny tzv. *elementární funkce*, tj.

- polynomy
- exponenciální a logaritmické funkce
- goniometrické a cyklometrické funkce
- mocninné funkce

a funkce, které z nich vzniknou konečným počtem sčítání, odčítání, násobení, dělení a skládání.

Příklad 2.28. Určete znaménko polynomu

$$P(x) = x(x-1)(x-2)^2 .$$

Řešení. Polynom má dva jednoduché kořeny $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$ a jeden dvojnásobný kořen $x_{3,4} = 2$. Tato tři čísla nám rozdělí celou reálnou osu na čtyři intervaly a v každém z těchto intervalů bude mít polynom stále stejné znaménko. Pro určení znaménka stačí zvolit libovolné číslo, které je uvnitř intervalu, a dosadit jej do polynomu. Zvolíme-li například číslo -2 a dosadíme-li do našeho rozkladu, dostaneme součin dvou záporných a jednoho kladného čísla. Výsledek je tak kladné číslo. V intervalu $(-\infty, 0)$ je tedy polynom kladný. Podobně rozhodneme pro ostatní intervaly a výsledek můžeme shrnout do tabulky.

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$R(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$

Fakt, že má polynom nějaký kořen sudé násobnosti, se projeví tak, že v tomto bodě se graf polynomu dotýká osy x a v tomto bodě se nemění znaménko polynomu.

Odtud plyne, že znaménko polynomu lze určit tak, že vybereme pouze kořeny s lichou násobností, určíme znaménko v jednom z intervalů, a pak se již znaménko pro další střídá. □

2.3 Derivace funkce

Definice 2.29. Buď f funkce a bod $x_0 \in D(f)$. Existuje-li vlastní limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

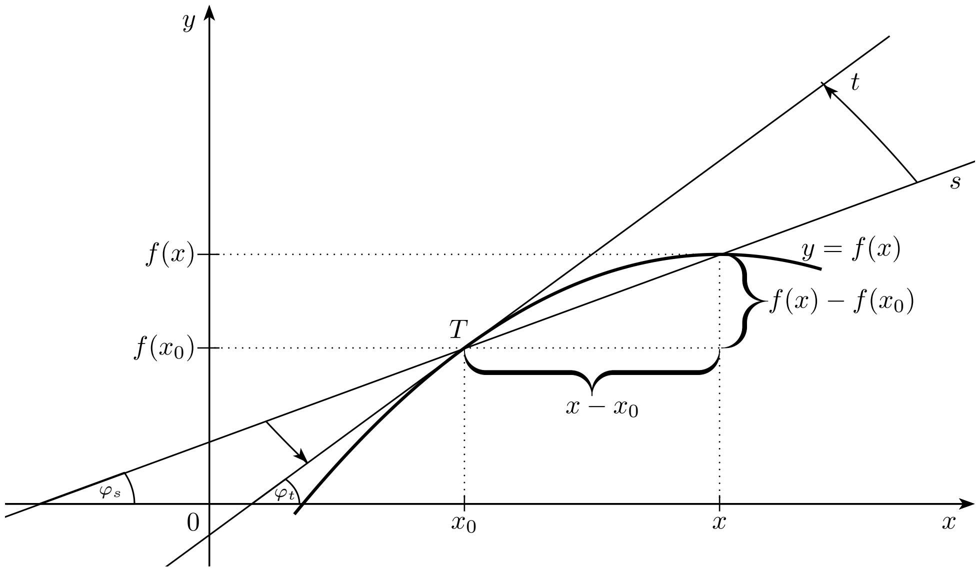
nazýváme tuto limitu *derivací funkce f v bodě x_0* a značíme $f'(x_0)$ nebo $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Položíme-li $h = x - x_0$, lze derivaci zapsat ve tvaru

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

Podobně definujeme *derivace zprava* a *derivace zleva*:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$



Aplikace 2.30. Cenová elasticita
V ekonomii potřebujeme často vyjádřit, jak citlivě některé veličiny reagují na změny jiné veličiny. Například, jak se mění poptávka po nějakém produktu v závislosti na jeho ceně (obvykle platí, že s rostoucí cenou klesá poptávka). Ke kvantifikaci takového jevu se zavádí tzv. elasticita. V našem konkrétním případě se jedná o tzv. *cenovou elasticitu poptávky*. Označíme-li P_1 počáteční cenu a P_2 cenu po změně a podobně Q_1 počáteční množství a Q_2 množství po změně, pak můžeme definovat tzv. koeficient cenové elasticity poptávky E vztahem

$$E = \frac{\frac{Q_2 - Q_1}{\frac{1}{2}(Q_2 + Q_1)}}{\frac{P_2 - P_1}{\frac{1}{2}(P_2 + P_1)}},$$

Z definice vidíme, že se vlastně jedná o jakousi průměrnou hodnotu změny v daném intervalu. Pokud bychom chtěli přesnou hodnotu v daném bodě, pak bychom tento průměr museli počítat v malém okolí tohoto bodu. Při označení $Q_2 - Q_1 = \Delta Q$ a $P_2 - P_1 = \Delta P$ dostaneme

$$E = \frac{\Delta Q}{\Delta P} \frac{P_1 + P_2}{Q_1 + Q_2}\,.$$

Podobně jako u definice derivace vidíme, že výraz $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ vyjadřuje směrnici sečny. Budeme-li počítat průměrnou hodnotu přes čím dál menší interval, můžeme uvažovat, že $Q_1 = Q_2 = Q$ a $P_1 = P_2 = P$ a sečna přejde opět v tečnu, dostaneme tak okamžitou hodnotu změny, a to je hledaná cenová elasticita poptávky

$$e = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} \frac{P}{Q}\,.$$

Poznámka 2.31. Analogicky se definuje cenová elasticita nabídky a také celá řada dalších pojmů v ekonomii jako marginální zisk/náklady apod.

Věta 2.32. *Pro derivace elementárních funkcí platí:*

$$
\begin{aligned}
c' &= 0, & (x^a)' &= ax^{a-1},\\
(e^x)' &= e^x, & (\ln x)' &= \frac{1}{x}\,,\\
(\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x,\\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}\,, & (\operatorname{cotg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}\,,\\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,\\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{x^2+1}\,, & (\operatorname{arccotg} x)' &= -\frac{1}{x^2+1}\,,\\
(a^x)' &= a^x\cdot \ln a\,, & \bigl(\log_a x\bigr)' &= \frac{1}{x\ln a}\,,
\end{aligned}
$$

kde $a \in \mathbb{R}$ a $c \in \mathbb{R}$. Tyto vzorce platí všude tam, kde jsou příslušné funkce definovány.

Věta 2.33. *Nechť mají funkce f, g derivaci na množině M. Pak platí:*

a) $\bigl(cf(x)\bigr)' = cf'(x)$, $c \in \mathbb{R}$,

b) $\bigl(f(x) \pm g(x)\bigr)' = f'(x) \pm g'(x)$,

c) $\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

d) je-li $g(x) \neq 0$, *pak* $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,.$

Věta 2.34. *Nechť funkce $u = g(x)$ má derivaci $g'(x)$, funkce $y = f(u)$ má derivaci $f'(u)$ a nechť platí $D(f) \supseteq H(g)$. Pak složená funkce $y = F(x) = f[g(x)]$ má derivaci a platí:*

$$F'(x) = f'[g(x)]\cdot g'(x).$$

Příklad 2.35. Vypočtěte derivace následujících funkcí:

a) $y = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 1$,

b) $y = 3\sqrt[3]{x}$,

c) $y = x^2 \ln x$,

d) $y = \frac{\cos x - 1}{\sin x}$,

e) $y = \operatorname{arctg} x^2$,

f) $y = \sqrt{\mathrm{e}^x + x}$.

Řešení. Ve všech případech použijeme výše uvedená pravidla pro derivování:

a) $y' = (4x^3 - 2x^2 + 3x - 1)' = 4\cdot 3x^2 - 2\cdot 2x + 3 = 12x^2 - 4x + 3.$

b) $y' = (3\sqrt[3]{x})' = (3x^{\frac{1}{3}})' = 3\cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$

c) $y' = (x^2\ln x)' = (x^2)'\ln x + x^2(\ln x)' = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln x + x.$

d) Použijeme větu o derivaci podílu:

$$
\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{\cos x - 1}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x - 1)'\sin x - (\cos x - 1)\cdot(\sin x)'}{(\sin x)^2} =\\
&= \frac{-\sin x\cdot \sin x - (\cos x - 1)\cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1 + \cos x}{1 - \cos^2 x} = -\frac{1}{1 + \cos x}.
\end{aligned}
$$

e) Použijeme větu o derivaci složené funkce:

$$y' = (\operatorname{arctg} x^2)' = \frac{1}{1+(x^2)^2}(x^2)' = \frac{2x}{1+x^4}.$$

f) $y' = (\sqrt{\mathrm{e}^x + x})' = \left((\mathrm{e}^x + x)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + x)^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{e}^x + x)' = \frac{\mathrm{e}^x+1}{2\sqrt{\mathrm{e}^x+x}}.$ □

Aplikace 2.36. Keynesianský multiplikátor
Jednoduchý makroekonomický model bez veřejných výdajů a zahraničního obchodu je dán vztahy

$$\begin{aligned} Y &= C + I \\ C &= a + bY, \qquad a,\, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

kde Y je národní důchod, C je spotřeba a I jsou investice. Jak musíme zvýšit investice, abychom dostali předem dané zvýšení národního důchodu?

Řešení. Dosazením druhé rovnice do první dostaneme vztah mezi národním důchodem a investicemi

$$Y = a + bY + I \qquad \Longrightarrow \qquad Y = \frac{a+I}{1-b}\,.$$

Máme odvodit, jak se změní národní důchod, když se změní investice, tj. předpokládáme, že obě veličiny se v čase mění a jsou tak funkcemi času. Víme, že změna je vyjádřena derivacemi, tj. zderivujeme-li předchozí rovnici podle času t, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1-b}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{2.1}$$

Číslo $K = \frac{1}{1-b}$ vyjadřuje vliv změny investic na národní důchod a říká se mu multiplikátor.

Uvažujme například, že $a = 0$, $b = 0{,}75$ a $I = 250$. Jak musíme zvýšit investice, aby se národní důchod zvýšil o 200? Pro multiplikátor K dostaneme

$$K = \frac{1}{1-0{,}75} = 4\,.$$

Dosazením do (2.1) dostaneme

$$200 = 4\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 50.$$

Multiplikátor je tedy příléhavý název. □

Z geometrického významu derivace plyne, že funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když její graf má v bodě $(x_0, f(x_0))$ tečnu se směrnicí $f'(x_0)$. Rovnice této tečny je

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Pro rovnici normály, tj. přímky kolmé k tečně a procházející dotykovým bodem, platí

$$\begin{aligned} y &= f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\,(x - x_0), && \text{je-li } f'(x_0) \neq 0, \\ x &= x_0, && \text{je-li } f'(x_0) = 0\,. \end{aligned}$$

Věta 2.37. *Nechť f má derivaci na otevřeném intervalu I.*

a) Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f rostoucí na I.

b) Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f klesající na I.

Věta 2.38. *Nechť funkce f, g mají vlastní derivace v každém bodě otevřeného intervalu I. Jestliže pro všechna $x \in I$ platí $f'(x) = g'(x)$, pak se funkce f, g liší o konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + c$.*

Zejména jestliže $f'(x) = 0$ na I, pak je f na I konstantní.

2.4 Extrémy funkce

Definice 2.39. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0:

a) *lokální maximum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$,

b) *lokální minimum*, existuje-li okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$,

c) *ostré lokální maximum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_0)$,

d) *ostré lokální minimum*, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) > f(x_0)$.

Věta 2.40 (Fermatova)**.** *Nechť má funkce f v bodě x_0 lokální extrém a nechť existuje derivace $f'(x_0)$. Pak $f'(x_0) = 0$.*

Bod x_0 s vlastností $f'(x_0) = 0$ se nazývá *stacionární bod* funkce.

Věta 2.41. *Mění-li derivace funkce při přechodu přes stacionární bod znaménko, pak v něm funkce má lokální extrém.*

Definice 2.42. *Druhou derivací* funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$ a pro libovolné $n \geq 2$ definujeme *n-tou derivaci* (*derivaci n-tého řádu*) funkce f vztahem $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Věta 2.43. *Nechť $f'(x_0) = 0$, tj. x_0 je stacionární bod.*

a) Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

b) Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Příklad 2.44. Najděte lokální extrémy funkce:

a) $f(x) = x^3 - 12x - 6$, b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Řešení. a) Najděme všechny stacionární body. Platí

$$f'(x) = (x^3 - 12x - 6)' = 3x^2 - 12.$$

Položme $f'(x) = 0$, dostaneme stacionární body $x = 2$ a $x = -2$. Zjistíme znaménko f':

interval	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Podle věty (2.41) vidíme, že v obou bodech má funkce extrém, přičemž v bodě $x = -2$ se jedná o maximum o hodnotě 10 a v $x = 2$ o minimum o hodnotě -22.

b) Postupujeme obdobně jako v předchozím případě:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Položme $f'(x) = 0$, dostaneme stacionární body $x = 1$ a $x = -1$. Znázorníme znaménko f':

interval	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
f'	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Proto v bodě $x = -1$ má funkce lokální minimum hodnoty $-\frac{1}{2}$ a v bodě $x = 1$ lokální maximum hodnoty $\frac{1}{2}$. $\square$

Aplikace 2.45. Optimální zdanění
Zvětšení zdanění zboží zvýší jeho cenu. To má za následek snížení poptávky (celkový efekt změny bude záviset na elasticitě poptávky). Toho, kdo daně vybírá, ovšem nejvíce zajímá, kolik daní vybere. Otázkou tedy je, zda-li snížení poptávky nepřeváží zvýšení daní, tj. sníží se celkový daňový výnos. Uvažujme, že poptávka se řídí vztahem

$$p_d = a + bq$$

a nabídka vztahem

$$p_s = c + dq,$$

kde p_d a p_s jsou jednotkové ceny v korunách, q značí množství a a, c, d>0 a b<0. Jak bude vypadat optimální daň?

Řešení. Označíme-li t daň uvalenou na jeden kus zboží, pak nabídka se bude řídit vztahem

$$p_s = c + dq + t\,.$$

Při rovnováze na trhu platí.

$$p_d = p_s \quad \Longrightarrow \quad c + dq + t = a + bq$$

a odtud pro množství na trhu dostaneme

$$q = \frac{a - c - t}{d - b}\,.$$

Celkový daňový výnos y je určen množstvím prodaného zboží a daně, tj.

$$y = qt = \frac{a - c - t}{d - b} t.$$

Pro nalezení optimální daně na jeden výrobek tedy hledáme maximum funkce y. Derivace je

$$y' = \frac{a - c - 2t}{d - b}.$$

Máme jediný stacionární bod $t = \frac{a-c}{2}$. Vzhledem k mnoha parametrům bude nejjednodušší použít pro určení typu extrému druhou derivaci

$$y'' = \frac{-2}{d - b}.$$

Tato derivace je záporná, jelikož $d - b > 0$. Stacionární bod je tedy lokálním maximem. Optimální daň na jeden kus výrobku tedy bude $\frac{a-c}{2}$ korun. □

Aplikace 2.46. Meltzer–Richard
Jeden ze standardních modelů v politické ekonomii říká, že redistribuce bohatství by měla být větší ve společnostech, kde mediánový příjem je značně menší než průměrný příjem, jinými slovy společnosti, ve kterých je větší nerovnost, by měly mít větší přerozdělení bohatství. Proč je tomu tak?

Řešení. Ukážeme si zjednodušený model podle [1]. Zavedeme následující značení a předpoklady

- $U(\cdot)$ značí užitek získaný z veřejných statků, daná funkce je rostoucí a konkávní;
- y_i je příjem i-té osoby;
- W_i je blahobyt i-té osoby;
- c_i je spotřeba i-té osoby;
- τ značí daně uvalené vládou na příjem každého jedince (nabývá hodnot mezi 0 a 1);
- g je množství veřejných statků, které vláda poskytuje.

Předpokládejme, že blahobyt každého jedince je dán vztahem

$$W_i = c_i + U(g)\,.$$

Prostředky každé osoby pro její spotřebu jsou její příjmy po zdanění, tj.

$$c_i = (1-\tau)y_i\,.$$

Příjem se liší osobu od osoby. Označíme $E(y)$ průměrnou hodnotu příjmu ve společnosti a $\operatorname{med}(y)$ mediánový příjem ve společnosti.

Idealizující předpoklad je, že v demokracii se všechny daně promění ve veřejné statky, máme tak podmínku

$$g = \tau E(y).$$

Můžeme tedy přepsat vztah pro blahobyt i-té osoby

$$W_i = \left(1 - \frac{g}{E(y)}\right) y_i + U(g) = (E(y) - g)\,\frac{y_i}{E(y)} + U(g).$$

Kdy bude blahobyt jedince největší v závislosti na množství veřejných statků? Pro zodpověžení této otázky stačí určit maximum funkce W_i:

$$\frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}g} = -\frac{y_i}{E(y)} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}g}.$$

Stacionární bod je řešením rovnice $\frac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}g} = 0$ a odtud $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}g} = \frac{y_i}{E(y)}$. Problémem je, že neznáme přesně funkci $U(g)$. Označíme-li $U_g = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}g}$, pak můžeme řešení $q_i^\star$ naší rovnice vyjádřit pomocí inverzní funkce jako

$$q_i^\star = U_g^{-1}\left(\frac{y_i}{E(y)}\right).$$

Jelikož U byla rostoucí a konkávní funkce, pak U_g je kladná a klesající funkce. Z vlastností inverzních funkcí pak plyne, že i U_g^{-1} je klesající. Odtud tedy víme, že bude existovat jedno řešení naší rovnice, které je závislé na hodnotě příjmu dané osoby a průměrné hodnotě příjmu. Navíc víme, že tato hodnota klesá s rostoucím příjmem. Jelikož g značí velikost veřejných statků, tak tento výsledek můžeme interpretovat tak, že bohatí lidé preferují méně přerozdělování (což je celkem v souladu s intuicí).

Tímto jsme určili množství pro danou osobu. Vláda ovšem musí nastavit jednu hodnotu g. Přidáme ještě jeden předoklad, tzv. pravidlo mediánového voliče. Toto pravidlo říká, že vítězná politika je dána mediánovou osobou populace. Jelikož jediná věc, která určuje úroveň preferované velikosti přerozdělování bohatství vládou, je hodnota $\frac{y_i}{E(y)}$, tak pro mediánového voliče dostaneme

$$q^\star = U_g^{-1}\left(\frac{\operatorname{med} y}{E(y)}\right).$$

Což bude hodnota, kterou budeme pozorovat v ekonomice. Obvyklým signálem nerovnosti je, že průměrná mzda je vyšší než mediánová mzda. V takovémto případě by podle tohoto modelu měla být míra přerozdělení vyšší než nastavená míra. □

Definice 2.47. Buď funkce f definovaná na množině M. Jestliže $x_0 \in M$ a platí

$$f(x) \leq f(x_0)$$

pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce f má na M *absolutní maximum* v bodě x_0. Podobně definujeme *absolutní minimum*.

Postup pro nalezení absolutních extrémů:

1. Najdeme v daném intervalu stacionární body a body, v nichž neexistuje první derivace.
2. Vypočteme funkční hodnoty v těchto bodech.
3. Vypočteme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu (pokud patří do $D(f)$).
4. Ze všech takto získaných funkčních hodnot vybereme největší a nejmenší. To bude absolutní maximum a minimum.

2.5 L'Hospitalovo pravidlo

Věta 2.48. *Buď $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Nechť je splněna jedna z podmínek*

i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$,

ii) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \lim\limits_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Existuje-li (vlastní nebo nevlastní) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *pak existuje také* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a platí*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Využitím různých triků se na tyto dva případy dají převést i ostatní tzv. *neurčité výrazy*

$$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad 0^0, \qquad \infty^0, \qquad 1^\infty.$$

2.6 Jak derivace ovlivňuje tvar grafu?

Definice 2.49. Leží-li graf funkce f nad každou svojí tečnou v libovolném bodě intervalu I, tj. platí-li

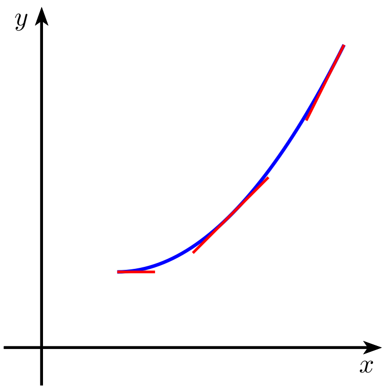
$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro} \quad x,\, x_0 \in I,$$

řekneme, že funkce je *konvexní* na intervalu I.

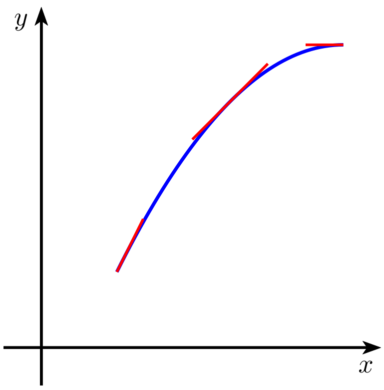
Leží-li graf funkce f pod každou svojí tečnou v libovolném bodě intervalu I, tj. platí-li

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{pro} \quad x,\, x_0 \in I,$$

řekneme, že funkce je *konkávní* na intervalu I.



konvexní = nad tečnou



konkávní = pod tečnou

Věta 2.50. *Nechť I je otevřený interval a f má druhou derivaci na I.*

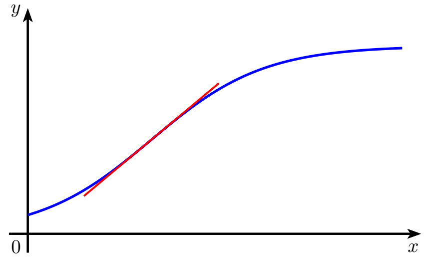
a) Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konvexní na I.

b) Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je f konkávní na I.

Definice 2.51. Řekneme, že x_0 je *inflexním bodem* funkce f, jestliže je f v x_0 spojitá, a jestliže je vlevo od bodu x_0 konkávní a vpravo od tohoto bodu je konvexní, nebo naopak.

Věta 2.52. *a) Nechť x_0 je inflexní bod a nechť existuje $f''(x_0)$. Pak $f''(x_0) = 0$.*

b) Nechť $f''(x_0) = 0$, v levém okolí bodu x_0 platí $f''(x) < 0$ a v pravém okolí bodu x_0 platí $f''(x) > 0$, nebo naopak. Pak má funkce f v bodě x_0 inflexní bod.



Obrázek 2.1: Inflexní bod

Příklad 2.53. Určete intervaly, ve kterých je funkce

$$f\colon y = x\mathrm{e}^x.$$

konvexní/konkávní, případně určete její inflexní body.

Řešení. Spočteme první derivaci:

$$y' = (x\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x.$$

Druhá derivace je

$$y'' = (\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)' = 2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x.$$

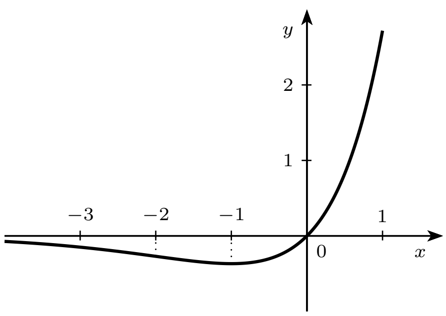
Určíme nulové body druhé derivace:

$$\mathrm{e}^x(2 + x) = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Znaménko druhé derivace je:

interval	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

A proto funkce má v bodě $x = -2$ inflexní bod. $\square$



Obrázek 2.2: Graf funkce $y = x\mathrm{e}^x$

Kapitola 3

Funkce více proměnných

Aplikace 3.1. Wind-chill index
Typickým příkladem funkce více proměnných, se kterou se setkal každý, je vztah mezi vnímanou a naměřenou teplotou, který je dále ovlivněn rychlostí větru (v případě funkce dvou proměnných) nebo i vlhkostí (funkce tří proměnných).

T/v	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**
5	4	3	2	1	1	0	-1	-1	-2	-2	-3
0	-2	-3	-4	-5	-6	-6	-7	-8	-9	-9	-10
-5	-7	-9	-11	-12	-12	-13	-14	-15	-16	-16	-17
-10	-13	-15	-17	-18	-19	-20	-21	-22	-23	-23	-24
-15	-19	-21	-23	-24	-25	-26	-27	-29	-30	-30	-31
-20	-24	-27	-29	-30	-32	-33	-34	-35	-36	-37	-38
-25	-30	-33	-35	-37	-38	-39	-41	-42	-43	-44	-45
-30	-36	-39	-41	-43	-44	-46	-48	-49	-50	-51	-52

$$W = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

Definice 3.2. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset$. Předpis f, který každému bodu množiny M přiřazuje právě jedno $z \in \mathbb{R}$ se nazývá *(reálná) funkce n (reálných) proměnných.* Množina M se nazývá *definiční obor* funkce f.

Definice 3.3 (Speciálně)**.** Nechť $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $D \neq \emptyset$. Předpis f, který každému bodu roviny $[x, y] \in D$ přiřazuje právě jedno $z \in \mathbb{R}$, nazýváme *funkcí dvou proměnných.* Tuto funkci označujeme

$$z = f(x, y).$$

Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f.

Definice 3.4. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon M \to \mathbb{R}$. Pak

$$G(f) = \{[x_1, \dots, x_n, y]; [x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n; y = f(x_1, \dots, x_n)\}$$

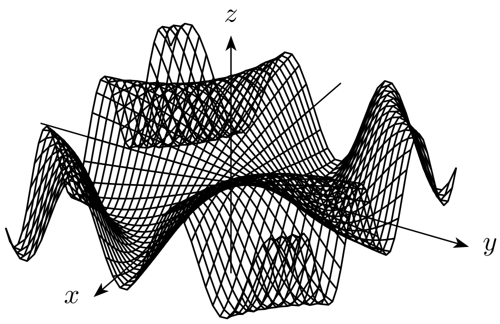
se nazývá *graf funkce* f.

Definice 3.5. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^2$, $f\colon M \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

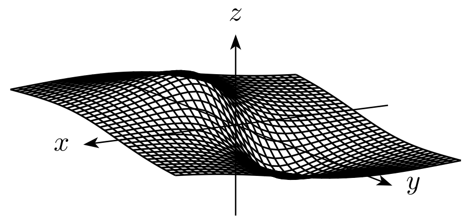
$$f_c = \{[x, y] \in M : f(x, y) = c\}$$

nazýváme *vrstevnice* funkce f na úrovni c.

$f(x, y) = \sin(xy)$



$f(x, y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$



Aplikace 3.6. Cobb-Douglasova produkční funkce
Důležitým příkladem funkce dvou proměnných je tzv. *Cobb-Douglasova produkční funkce*, která se používá k modelování výstupů firmy nebo státu. Je to například funkce tvaru

$$P(L, K) = aL^{\alpha}K^{\beta}, \qquad a > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1,$$

kde P značí celkovou produkci, L práci (obvykle měřenou v hodinách) a K investovaný kapitál.

3.1 Limita a spojitost funkce více proměnných

Pojem limity funkce dvou proměnných je opět založen na pojmu okolí bodu. Zásadní rozdíl je v tom, jak vypadá okolí bodu na přímce (ose x) a okolí bodu ve vyšší dimenzi. Okolím bodu $[x_0, y_0]$ ležícího v rovině (tj. v dvojrozměrném prostoru) je množina všech bodů $[x, y]$, které mají od tohoto bodu *vzdálenost* menší než nějaké číslo a. Vzdálenost neboli metriku můžeme definovat různými způsoby. Podle výběru metriky dostaneme tvar okolí. Například v euklidovské metrice je okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ vnitřek kruhu se středem $[x_0, y_0]$ a poloměrem a, tj.

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < a^2.$$

Ryzím okolím bodu je pak okolí tohoto bodu bez bodu samotného.

Definice 3.7. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $A \in \mathbb{R}^2$ *limitu* L, $L \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému okolí $\mathcal{O}(L)$ bodu L existuje ryzí okolí $\mathcal{O}(A)$ bodu A takové, že pro každý bod $x \in \mathcal{O}(A) \cap \mathcal{D}(f)$ platí $f(x) \in \mathcal{O}(L)$.

Definice 3.8. Nechť bod $[x_0, y_0]$ je takový bod definičního oboru $\mathcal{D}(f)$ funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, že jeho libovolné ryzí okolí obsahuje bod množiny $\mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f je *spojitá v bodě* $[x_0, y_0]$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Řekneme, že funkce f je spojitá na množině $D \subseteq \mathbb{R}^2$, je-li spojitá v každém bodě této množiny.

3.2 Parciální derivace

Definice 3.9. Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $[x_0, y_0]$ je bod. Existuje-li limita

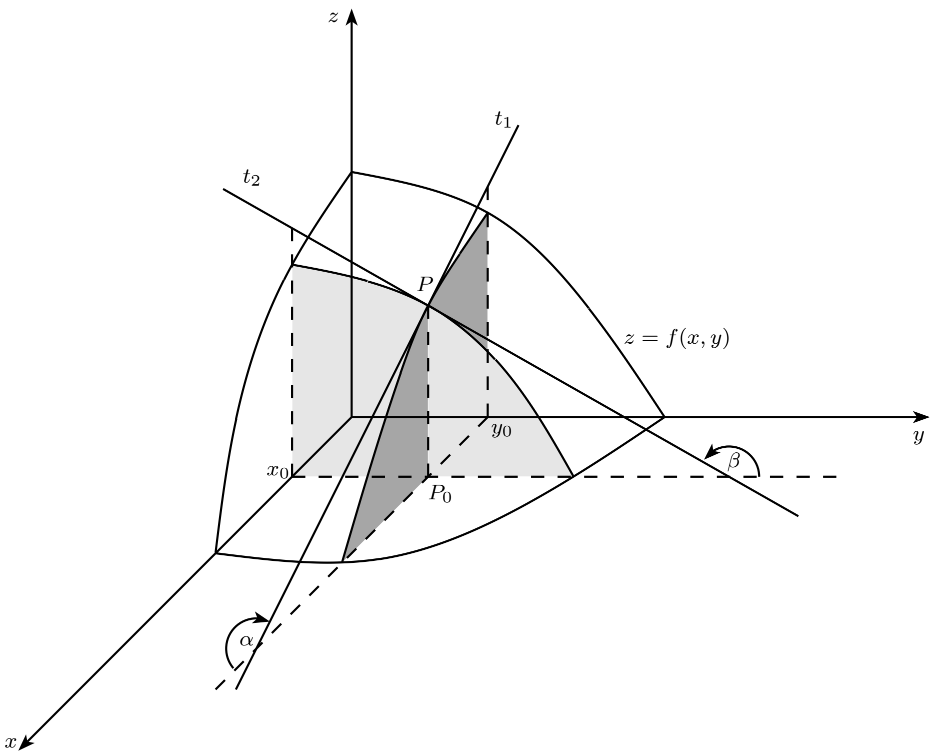
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

řekneme, že funkce f má v bodě $[x_0, y_0]$ *parciální derivaci* podle x.

Tuto derivaci značíme

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)$$

Analogicky definujeme a značíme derivaci podle y.



Protože libovolná parciální derivace funkce je definovaná jako „obyčejná“ derivace funkce jedné proměnné, platí pro počítání parciálních derivací obvyklá pravidla pro derivování. Při výpočtu postupujeme tak, že všechny proměnné kromě té, podle které derivujeme, považujeme za konstanty.

Příklad 3.10. Vypočtete parciální derivace funkce dvou proměnných:

a) $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, b) $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$,

c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, d) $f(x, y) = \ln(x + y^2)$.

Řešení. a) Použijeme pravidla pro derivaci součtu, případně rozdílu, a pravidlo o derivaci polynomu. Dostaneme tak

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3,$$
$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y.$$

b) Použijeme pravidlo pro derivaci podílu:

$$f_x(x, y) = \frac{y(x - y) - xy}{(x - y)^2} = -\frac{y^2}{(x - y)^2},$$
$$f_y(x, y) = \frac{x(x - y) + xy}{(x - y)^2} = \frac{x^2}{(x - y)^2}.$$

c) Použijeme pravidlo pro derivaci složené funkce:

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
$$f_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

d) Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladě:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x+y^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{2y}{x+y^2}.$$

□

Příklad 3.11. Nalezněte a interpretujte $P_K(200,120)$ a $P_L(200,120)$ pro Cobb-Douglasovu funkci

$$P(K,L) = 20K^{0,4}L^{0,6}.$$

Řešení. Při počítání derivace podle K uvažujeme, že L je konstanta a použijeme obvyklá pravidla pro derivování

$$P_K(K,L) = 20 \cdot 0{,}4K^{-0,6}L^{0,6}.$$

Dosazením $K = 200$ a $L = 120$ dostaneme

$$P_K(200,120) = 8 \cdot 200^{-0,6} \cdot 120^{0,6} \approx 5{,}9.$$

Tento výsledek znamená, že produkce se zvýší o 5,9 jednotek za každou jednotku kapitálu (když $K = 200$ a $L = 120$). Toto číslo se nazývá *marginální produktivita kapitálu.*

Postupujeme podobně jako při počítání derivace podle K, tj. uvažujeme, že K je konstanta a použijeme obvyklá pravidla pro derivování

$$P_L(K,L) = 20 \cdot 0{,}6K^{0,4}L^{-0,4}.$$

Dosazením $K = 200$ a $L = 120$ dostaneme

$$P_L(200,120) = 12 \cdot 200^{0,4} \cdot 120^{-0,4} \approx 14{,}7$$

Tento výsledek znamená, že produkce se zvýší o 14,7 jednotek za každou jednotku práce (když $K = 200$ a $L = 120$). Toto číslo se nazývá *marginální produktivita práce.* □

Příklad 3.12. Uvažujme firmu, která používá několik různých zdrojů. Pro jednoduchost uvažujme dva zdroje: suroviny a práci. Podle jedné teorie je férová mzda (cena) dána oceněním práce (nebo libovolného vstupu) hodnotou jeho marginálního produktu. Tato hodnota je daná součinem ceny výsledného zboží a marginálního produktu daného vstupu (tj. změnou celkové produkce při změně tohoto vstupu o jednotku). Dále uvažujme, že se množství vyrobeného zboží řídí Cobb-Douglasovou produkční funkcí. Je za těchto předpokladů možné zaplatit férovou mzdu?

Řešení: Uvažujme, že firma prodává svůj výstup Q za cenu P_Q a $Q = aM^\alpha L^\beta$, kde M značí množství suroviny, L množství práce a a, α a β jsou kladné konstanty. Pokud má být každý zdroj placen cenou rovnou hodnotě svého marginálního produktu, potom cena těchto zdrojů bude

$$P_M = P_Q \frac{\partial Q}{\partial M}.$$

$$P_L = P_Q \frac{\partial Q}{\partial L}.$$

Celkové výdaje TC za vstupy pak budou

$$TC = MP_M + LP_L = M\left(P_Q \frac{\partial Q}{\partial M}\right) + L\left(P_Q \frac{\partial Q}{\partial L}\right) = P_Q\left(M\frac{\partial Q}{\partial M} + L\frac{\partial Q}{\partial L}\right)$$

Celkový výnos TR bude

$$TR = P_Q Q.$$

Celkové výdaje na vstupy se budou rovnat celkovému výnosu, když

$$P_Q\left(M\frac{\partial Q}{\partial M} + L\frac{\partial Q}{\partial L}\right) = P_Q Q$$

a odtud
$$Q = M\frac{\partial Q}{\partial M} + L\frac{\partial Q}{\partial L}$$
Vypočteme derivace
$$\frac{\partial Q}{\partial M} = \alpha a M^{\alpha-1}L^{\beta} \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} = \beta a M^{\alpha}L^{\beta-1}$$
a dosadíme
$$Q = M\left(\alpha a M^{\alpha-1}L^{\beta}\right) + L\left(\beta a M^{\alpha}L^{\beta-1}\right) = Q(\alpha+\beta).$$
Abychom tedy mohli zaplatit férovou mzdu, musí platit, že $\alpha + \beta = 1$. Tento koncept férové mzdy tedy není obecně použitelný.

Poznámka 3.13. Zároveň máme otázky k přemýšlení. Co pro produkci znamená, že $\alpha + \beta = 1$. Proč v situacích $\alpha + \beta > 1$ a $\alpha + \beta < 1$ není možné platit férovou mzdu?

Definice 3.14. Nechť $[x_0, y_0] \in D(f_x)$. Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací funkce 2. řádu* podle x funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xx}(x_0, y_0)$ nebo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.

Existuje-li parciální derivace funkce $f_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$, nazýváme tuto derivaci *smíšenou parciální derivací 2. řádu* funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ a značíme ji $f_{xy}(x_0, y_0)$ nebo také $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Věta 3.15 (Schwarz, Clairaut)**.** *Nechť funkce f má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ parciální derivace f_x, f_y a smíšenou parciální derivaci f_{xy}, která je v bodě $[x_0, y_0]$ spojitá. Pak existuje také smíšená parciální derivace $f_{yx}(x_0, y_0)$ a platí*
$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0).$$

Příklad 3.16. Vypočtěte všechny druhé derivace funkce $f(x, y) = x^y$, $x > 0$.

Řešení. Parciální derivaci podle x určíme jako derivaci mocninné funkce a derivaci podle y jako derivaci exponenciální funkce se základem x, tj.
$$f_x = yx^{y-1}, \quad f_y = x^y \ln x.$$
Podobně obdržíme
$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{yy} = x^y \ln^2 x.$$
Při výpočtu smíšených derivací musíme derivovat oba výrazy podle pravidla pro výpočet derivace součinu a dostaneme
$$f_{xy} = x^{y-1}(y \ln x + 1), \quad f_{yx} = x^{y-1}(y \ln x + 1).$$
□

3.3 Lokální extrémy

Definice 3.17. Řekneme, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $[x_0, y_0]$ *lokálního maxima (minima)*, jestliže existuje okolí tohoto bodu takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$, resp. $f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$.

Jsou-li nerovnosti v těchto vztazích pro $[x, y] \ne [x_0, y_0]$ ostré, mluvíme o *ostrých* lokálních maximech a minimech.

(Ostrá) lokální maxima a minima nazýváme souhrně *(ostré) lokální extrémy.*

Definice 3.18. Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Řekneme, že bod $[x_0, y_0]$ je *stacionární bod funkce f*, jestliže v bodě $[x_0, y_0]$ existují obě parciální derivace prvního řádu funkce f a platí
$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0.$$

Věta 3.19 (Fermat)**.** *Nechť funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém. Pak všechny parciální derivace prvního řádu funkce f, které v tomto bodě existují, jsou rovny nule.*

Věta 3.20. *Nechť funkce* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *má v bodě* $[x_0, y_0]$ *a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť* $[x_0, y_0]$ *je její stacionární bod. Jestliže*

$$D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$

pak má funkce f *v* $[x_0, y_0]$ *ostrý lokální extrém. Je-li* $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$*, jde o minimum, je-li* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$*, jde o maximum.*

Jestliže $D(x_0, y_0) < 0$*, pak v bodě* $[x_0, y_0]$ *lokální extrém nenastává.*

Příklad 3.21. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Řešení. Funkce, jejíž extrémy hledáme, je polynomem proměnných x, y, a proto jsou její parciální derivace spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech, které najdeme jako řešení soustavy rovnic

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0, \quad f_y = 3y^2 - 3x = 0.$$

Z první rovnice plyne $y = x^2$ a dosazením do druhé rovnice dostáváme

$$x^4 - x = x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

odtud $x_1 = 0, x_2 = 1$ (kvadratický trojčlen $x^2 + x + 1$ má záporný diskriminant, a je vždy kladný). Existují tedy dva stacionární body $P_1 = [0, 0]$, $P_2 = [1, 1]$. Dále platí $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = -3$, odtud

$$D(x, y) = 36xy - 9, \quad \text{tj.} \qquad D(P_1) = -9 < 0, \qquad D(P_2) = 36 - 9 = 27 > 0.$$

V bodě P_1 tedy extrém nenastává a v bodě P_2 nastává ostré lokální minimum, neboť $z_{xx}(P_2) = 6 > 0$. Hodnota tohoto extrému je $f(1, 1) = -1$. □

Aplikace 3.22. Soutěž a koluze

Představme si, že jsme producentem nějakého produktu, jehož nefixní produkční náklady jsou minimální (např. minerální voda, mobilní data atd.), a zároveň máme monopol, tj. jsme jediným producentem. Pro konkrétnost uvažujme, že cena našeho produktu je

$$p = 6 - 0{,}01x, \qquad 0 \le x \le 600,$$

kde x značí množství prodaného produktu. Zisk je potom popsán funkcí

$$R(x) = x(6 - 0{,}01x) = 6x - 0{,}01x^2\,.$$

Náš maximální zisk najdeme položením první derivace nule, tj.

$$R'(x) = 6 - 0{,}02x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 300\,.$$

Že se jedná o maximum, bychom mohli ověřit např. pomocí druhé derivace. Maximální zisk tak bude $R(300) = 900$ Kč při ceně 3 Kč za jednotku.

Co se stane, když budeme mít dalšího konkurenta, tj. půjde již o duopol? Nová cenová funkce bude

$$p = 6 - 0{,}01x - 0{,}01y,$$

kde x značí množství produktu, který prodáme, a y značí množství, které prodá náš konkurent. Náš zisk pak bude

$$R_1(x, y) = px = 6x - 0{,}01x^2 - 0{,}01xy$$

a zisk našeho konkurenta bude

$$R_2(x, y) = py = 6y - 0{,}01xy - 0{,}01y^2\,.$$

Každý z nás se snaží maximalizovat svůj zisk, tj. položíme rovny nule parciální derivace

$$(R_1)_x = 6 - 0{,}02x - 0{,}01y = 0$$

$$(R_2)_y = 6 - 0{,}01x - 0{,}02y = 0$$

Řešením této soustavy rovnic je $x = 200$, $y = 200$. Tedy my i náš konkurent budeme prodávat při ceně $p(200, 200) = 2\,\text{Kč}$ a zisk každého bude $R_1 = R_2 = 400\,\text{Kč}$.

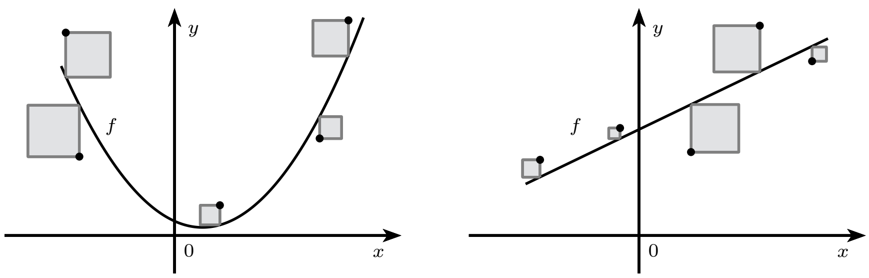
Můžeme si povšimnout, že při konkurenci na trhu duopol produkuje více než monopol, a navíc při nižší ceně, tj. tato situace je výhodnější pro zákazníka. Zároveň ovšem platí, že celkový zisk duopolistů je nižší než zisk, který měl producent při monopolu. Při této situaci v realitě tedy obvykle dojde k tomu, že duopolisté spolupracují a rozdělí si trh jako jeden monopol (tzv. koluze).

Aplikace 3.23. Metoda nejmenších čtverců
Máme-li výsledky nějakého měření, jsou tyto výsledky obyčejně zatíženy nějakou chybou. Chceme-li tedy najít funkci, která popisuje námi sledovaný děj, není podstatný požadavek, aby tato funkce procházela naměřenými hodnotami. Požadujeme ovšem, aby vyjadřovala výsledky měření co nejpřesněji, a to v následujícím smyslu.

Označme y_k naměřené hodnoty v bodech x_k, $k = 1, \dots, n$ a f hledanou funkci, nejčastěji polynom. Standartním kritériem nejlepšího přiblížení hledané funkce a naměřených hodnot je požadavek, aby součet

$$S = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - y_k)^2$$

byl co nejmenší. Jedná se o součet obsahů čtverců, jejich strana má velikost rovnu rozdílu naměřené hodnoty a hodnoty nalezené funkce v daném bodě. O takto získaných křivkách říkáme, že byly nalezeny *metodou nejmenších čtverců*.



Jak vypadá rovnice přímky, která je proložena danými body touto metodou?

Řešení. Označme $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, ..., $[x_n, y_n]$ body v rovině, kterými prokládáme přímku $y = ax + b$ metodou nejmenších čtverců. Pak hledáme minimum funkce

$$S(a, b) = \sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)^2.$$

Lokální extrém dané funkce může nastat jen ve stacionárním bodě. Spočteme parciální derivace

$$S'_a = 2\sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k)x_k = 2\left(a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right),$$

$$S'_b = 2\sum_{k=1}^{n} (ax_k + b - y_k) = 2\left(a\sum_{k=1}^{n} x_k + b\sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} y_k\right).$$

Jelikož $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$, dostaneme pro stacionární body soustavu

$$\begin{aligned} a\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ a\textstyle\sum_{k=1}^{n} x_k + \quad bn \quad &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} y_k\,. \end{aligned}$$

Z povahy úlohy je zřejmé, že nějaká optimální přímka musí existovat. Dá se ukázat, že daná soustava má právě jedno řešení (tj. existuje jediný stacionární bod) s výjimkou případu, kdy dva body mají stejnou x-ovou souřadnici. Jelikož řešením soustavy je jen jeden stacionární bod, musí právě tento bod být hledaným řešením. □

Předchozím příkladem jsme tak odvodily následující větu.

Věta 3.24. *Nechť $[x_1, y_1]$, $[x_2, y_2]$, $\ldots$, $[x_n, y_n]$ jsou body v rovině, které prokládáme přímkou $y = ax + b$ metodou nejmenších čtverců, tj. hledáme minimum funkce $S(a, b) = \sum_{k=1}^{n}(ax_k + b - y_k)^2$.*

Pak pro koeficienty a, b platí:

$$\begin{aligned} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + \quad bn \quad &= \sum_{k=1}^{n} y_k. \end{aligned}$$

Poznamenejme ještě, že analogicky se dají odvodit i vztahy pro jiné křivky nalezené metodou nejmenších čtverců (parabola, exponenciála atd.).

3.4 Aplikační úlohy k řešení

Příklad 3.25. Uvažme tzv. nákladovou funkci

$$C(x) = 8\sqrt[4]{x^3} + 300,$$

která vyjadřuje náklady na produkci x výrobků v stovkách korun. Spočtěte derivaci $C'(x)$ a interpretujte tento výsledek.

Příklad 3.26. Roční zisk firmy x let od dnešního dne se předpokládá ve výši

$$P(x) = 5x - 0{,}4x^2$$

miliónů korun ($0 \leq x \leq 8$). Vypočtěte $P(3)$, $P'(3)$ a $P''(3)$ a interpretujte tyto výsledky.

Příklad 3.27. Farma může prodat 20 beden úrody týdně při ceně 400 Kč. Majitel odhaduje, že při snížení ceny o 10 Kč prodá o dvě bedny více. Výrobní náklady jsou 200 Kč na jednu bednu. Jaká je optimální cena bedny úrody pro maximalizaci zisku a jak velký tento zisk bude?

Literatura

[1] A. H. Meltzer, S. F. Richard; A Rational Theory of the Size of Government, *Journal of Political Economy*, **89** (1981), 914–927.

Kapitola 4

Lineární algebra

4.1 Vektory a počítání s nimi

Definice 4.1. *Vektorem* rozumíme libovolnou uspořádánou n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Značíme

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Jednotlivým prvkům $x_1, x_2, \ldots, x_n$ říkáme složky vektoru, číslo n se nazývá dimenze vektoru $\vec{v}$.

Dva vektory $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jsou si rovny, jestliže se rovnají odpovídající si složky, tj.

$$\vec{x} = \vec{y} \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = y_1,\, x_2 = y_2,\, \ldots,\, x_n = y_n.$$

Vektor můžeme též zapsat jako

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Definice 4.2. Množina všech vektorů $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde $x_i \in \mathbb{R}$ společně s operacemi sčítání vektorů

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

a násobením vektoru číslem $c \in \mathbb{R}$

$$c \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (c \cdot x_1, c \cdot x_2, \ldots, c \cdot x_n)$$

se nazývá vektorový prostor $\mathbb{R}^n$.

Vektor $\vec{o} = (0, 0, \ldots, 0)$ se nazývá nulový vektor.

Poznámka 4.3. Obecně se vektor definuje jako prvek abstraktní struktury, které se říká vektorový prostor. Roli vektorů pak mohou hrát nejen uspořádané n-tice čísel, ale třeba i funkce, matice, posloupnosti atd.

Počítání s vektory má mnoho podobných vlastností jako počítání s čísly:

Věta 4.4. *Nechť $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou libovolné vektory z $\mathbb{R}^n$ a c, $d \in \mathbb{R}$, pak*

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ *(komutativní zákon)*

2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ *(asociativní zákon)*

3. $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$

4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$

5. $c(\vec{u}+\vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$ *(distributivní zákon)*

6. $(c+d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$ *(distributivní zákon)*

7. $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$

8. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Definice 4.5. Nechť $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Potom *skalární součin* $\vec{x} \cdot \vec{y}$ je definován jako

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \ldots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \,.$$

Definice 4.6. *Velikostí* vektoru $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ rozumíme nezáporné číslo

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Definice 4.7. Vektory $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nazveme *ortogonální*, právě když

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \,.$$

Definice 4.8. Nechť $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ je konečná posloupnost vektorů z vektorového prostoru V. Vektor $\vec{x}$, pro který platí

$$\vec{x} = t_1 \vec{x}_1 + t_2 \vec{x}_2 + \cdots + t_n \vec{x}_n,$$

kde $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou nějaká reálná čísla, se nazývá *lineární kombinace* vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$.

Definice 4.9. Řekneme, že vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$ jsou *lineárně závislé*, jestliže existují reálná čísla $t_1, t_2, \ldots, t_n$, z nichž alespoň jedno je různé od nuly, taková, že platí

$$\vec{o} = t_1 \vec{x}_1 + t_2 \vec{x}_2 + \cdots + t_n \vec{x}_n.$$

V opačném případě říkáme, že vektory jsou *lineárně nezávislé.*

Lineárně závislé vektory můžeme chápat tak, že alespoň jeden z nich se dá vyjádřit jako lineární kombinace některých ostatních. Lineárně nezávislé pak tak, že žádný z nich se nedá napsat pomocí kombinace ostatních.

4.2 Matice

Definice 4.10. *Maticí* A rozumíme schéma

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde a_{ij} pro $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$ jsou reálná čísla nebo funkce. Je-li tato matice (tabulka) sestavená z m řádků a n sloupců, říkáme, že A je matice typu $m \times n$. Je-li $m = n$ nazývá se matice A *čtvercová matice*, jinak *obdélníková matice.*

Je-li A čtvercová matice, říkáme, že prvky tvaru a_{ii}, tj. prvky, jejichž řádkový a sloupcový index jsou stejné, tvoří *hlavní diagonálu.*

Operace s maticemi

- Nechť $k \neq 0$ je reálné číslo. Výsledkem *násobení matice A číslem k* je matice C, jejíž prvky jsou tvaru
$$c_{ij} = k \cdot a_{ij}.$$
- Nechť A, B jsou matice téhož typu $m \times n$. *Součtem* matic A, B nazýváme matici C, jejíž prvky jsou
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$
- Nechť A je matice typu $m \times n$ a B je matice typu $n \times p$. *Součinem* matic A a B (v tomto pořadí) nazýváme matici C (typu $m \times p$), jejíž prvky jsou
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Definice 4.11. Je-li A matice typu $m \times n$, pak *transponovaná matice* A^T je matice typu $n \times m$, která vznikne z matice A záměnou řádků za sloupce, tj. i-tý sloupec matice A^T je i-tý řádek matice A pro všechna i.

Definice 4.12. *Diagonální matice* je čtvercová matice, která má všechny prvky mimo hlavní diagonálu rovny nule.

Definice 4.13. *Jednotková matice* je čtvercová matice, která má v hlavní diagonále všechny prvky rovny jedné a všechny prvky mimo diagonálu rovny nule. Tuto matici budeme značit I.

Příklad 4.14. Pro dané matice spočtěte $(2A + B)^T$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení.
$$2A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2A + B = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad (2A + B)^T = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$
□

Příklad 4.15. Pro dané matice spočtěte $A \cdot B$
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení.
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 4 + 0\cdot 0 & 3\cdot(-2) + 0\cdot 2 & 3\cdot 1 + 0\cdot 3 \\ -1\cdot 4 + 5\cdot 0 & -1\cdot(-2) + 5\cdot 2 & -1\cdot 1 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 12 & -6 & 3 \\ -4 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$
□

Všimněme si, že součin $B \cdot A$ vůbec není definován. Navíc ani v případě, že násobení je definováno pro obě pořadí, nemusí platit, že $A \cdot B = B \cdot A$.

Věta 4.16 (Základní vlastnosti počítání s maticemi)**.** *Nechť matice A, B, C mají správné rozměry tak, aby se dali provést naznačené operace a $k \in \mathbb{R}$. Pak*

1. $A + B = B + A$ *(komutativní zákon)*

2. $(A+B)+C = A+(B+C)$ *(asociativní zákon)*

3. $A(BC) = (AB)C$ *(asociativní zákon)*

4. $A(B+C) = AB+AC$ *(levý distributivní zákon)*

5. $(A+B)C = AC+BC$ *(pravý distributivní zákon)*

6. $k(A+B) = kA+kB$

7. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

Proč se to dělá zrovna takto?
Násobení matic vypadá už na první pohled nelogicky a příliš komplikovaně. Důvodem je, že první byla konkrétní aplikace matic, a až pak definice násobení. Představme si, že máme „rozumné“ pravidlo, které každému bodu v rovině přiřadí nějaký jiný bod (konkrétně se jedná o lineární zobrazení). Příkladem takového pravidla je např. osová souměrnost v rovině nebo otočení o daný úhel. Matematicky to můžeme vyjádřit takto (více o funkcích se dozvíme později):

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1+bx_2 \\ cx_1+dx_2 \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1+Bx_2 \\ Cx_1+Dx_2 \end{pmatrix}$$

Složení zobrazení f a g je pak dáno

$$f\left(g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} Ax_1+Bx_2 \\ Cx_1+Dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (aA+bC)x_1+(aB+bD)x_2 \\ (cA+dC)x_1+(cB+dD)x_2 \end{pmatrix}$$

Přirozeně se nabízí tato zobrazení reprezentovat maticemi

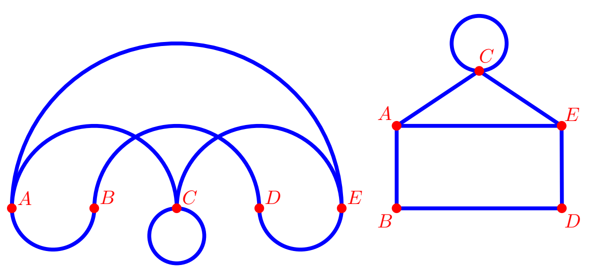
$$F = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} aA+bC & aB+bD \\ cA+dC & cB+dD \end{pmatrix}$$

a násobení matic pak definovat tak, aby odpovídalo skládání těchto zobrazení:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA+bC & aB+bD \\ cA+dC & cB+dD \end{pmatrix}$$

4.2.1 Některé aplikace matic

Grafem rozumíme konečnou množinu bodů (těm říkáme vrcholy) a konečnou množinu hran, kdy každá z nich spojuje dva vrcholy (ne nutně různé). Tyto grafy můžeme prezentovat obrázkem



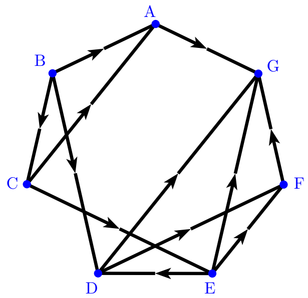
Nevýhodou je, že každý graf má nekonečně mnoho reprezentací. Proto používáme pro jeho zkoumání tzv. *matici sousednosti*. Pro graf o n vrcholech se jedná o čtvercovou matici $n \times n$ definovanou takto

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li hrana mezi vrcholy } i \text{ a } j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro náš graf dostaneme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

V mnoha aplikacích, které můžeme modelovat pomocí grafu, je mezi vrcholy zároveň nějaký vztah, který vede k tomu, že hrana by měla být orientovaná. Například vztah dravec-kořist v grafu modelujícím ekosystém nebo jednosměrná cesta v modelu dopravní sítě. Tímto dostaneme tzv. *orientovaný graf.*



I pro orientovaný graf můžeme zavést matici sousednosti, kde pro jednotlivé koeficienty platí

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{vede-li hrana z vrcholu } i \text{ do vrcholu } j, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pro náš graf dostaneme matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cestou v grafu rozumíme posloupnost hran, která nám umožní cestovat z jednoho vrcholu do jiného. Její délka je pak číslo určující počet hran, které obsahuje.

Uvažme matici

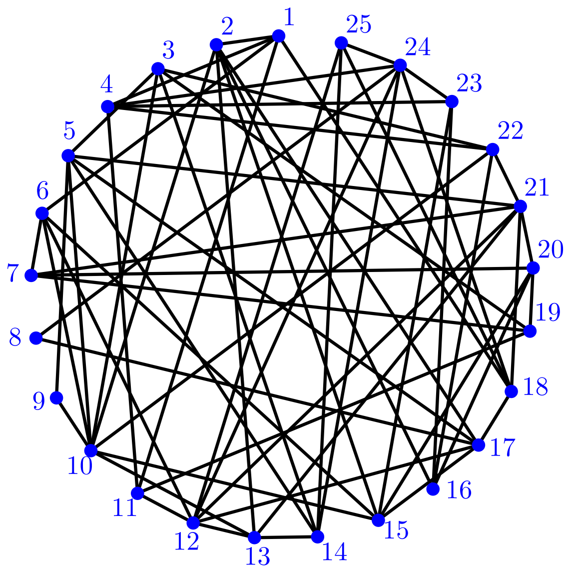
$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Co reprezentují čísla v této matici? Z definice násobení matic víme, že

$$\left(A^2\right)_{13} = a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} + a_{14}a_{43} + a_{15}a_{53}\,.$$

Tento výraz bude nenulový, když alespoň jeden ze součinů $a_{1k}a_{k3}$ bude nenulový, což ale nastane jen tehdy, když oba členy a_{1k} i a_{k3} budou nenulové. To ale znamená, že existuje hrana mezi prvním a k-tým vrcholem a také hrana mezi k-tým a třetím vrcholem, tedy existuje cesta délky 2, která spojuje první a třetí vrchol.

Aplikace 4.17. Sociální sítě
Kdo je nejvýznamnější postavou v této síti vztahů?



Řešení. Místo směsice čar uvážíme matici sousednosti, která zachycuje stejnou situaci a můžeme ji studovat.

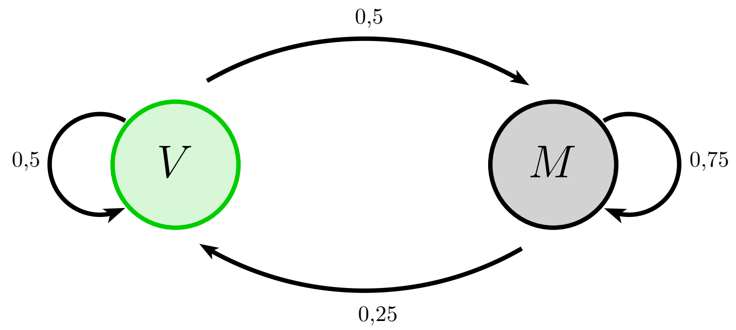
$$
\begin{pmatrix}
0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}
$$

Základní metrika, která udává odpověď na naši otázku, je *stupeň vrcholu*, který udává počet hran, jež z daného vrcholu vychází. Což v našem případě znamená počet kontaktů, která daná osoba má. V této metrice je mnoho osob rovnocenných (což až tak nevadí), ale nijak není rozlišena kvalita jejich kontaktů (jako kvalitnější můžeme například brát kontakty, které sami mají hodně kontaktů). Pro určení stupně vrcholu stačí spočítat všechny jedničky v daném řádku (nebo sloupci). Můžeme zjistit i stupeň každého vrcholu pomocí vhodné maticové operace (stačí matici sousednosti vynásobit maticí, která má jeden sloupec a správný počet řádků, přičemž obsahuje samé jedničky). □

Pro lepší metriku, která zohlední i kvalitu jednotlivých kontaktů, musíme ještě trochu pokročit ve studiu matic.

Aplikace 4.18. Stěhování
Předpokládejme, že populace se stěhuje mezi dvěma regiony, např. venkovem a městem, podle následujícího schématu. Každý rok se 50% obyvatel venkova přestěhuje do měst a 25% obyvatel měst se přestěhuje na venkov. Je-li například na začátku polovina obyvatel ve městě a tento vzor migrace bude pokračovat, jak bude vypadat stav po dvou letech? A jak bude rozdělení obyvatelstva vypadat z dlouhodobého hlediska? Vyprázdní se venkov? Nebo se situace stabilizuje tak, že část obyvatel bude žít ve městě a část na venkově?

Řešení. Celou situaci můžeme zachytit i graficky pomocí tzv. *grafu přechodu*:



Stav po jednom roce můžeme popsat dvěma rovnicemi

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= 0{,}5v_k + 0{,}25m_k \\ m_{k+1} &= 0{,}5v_k + 0{,}75m_k \end{aligned}$$

Tyto rovnice můžeme zapsat pomocí vektorů a matic

$$\begin{pmatrix} v_{k+1} \\ m_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_k \\ m_k \end{pmatrix}$$

a zjednodušeně

$$\vec{p}_{k+1} = T \cdot \vec{p}_k\,.$$

Stav po dvou letech dostaneme

$$\vec{p}_{k+2} = T \cdot \vec{p}_{k+1} = T \cdot (T \cdot \vec{p}_k) = T^2 \cdot \vec{p}_k\,.$$

Pro naše konkrétní hodnoty dostaneme

$$\vec{p}_2 = T^2 \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0{,}375 & 0{,}3125 \\ 0{,}625 & 0{,}6875 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}34375 \\ 0{,}65625 \end{pmatrix}$$

a analogicky bychom dostali stav po dalších letech. Pokud má existovat nějaký rovnovážný stav, tak pro něj musí platit

$$\vec{p} = T \cdot \vec{p}$$

Jak najít takový vektor si povíme později. □

Definice 4.19. *Markovův řetězec* je náhodný proces, který popisuje posloupnost možných událostí. Pro tento proces platí, že pravděpodobnost přechodu procesu do následujícího stavu závisí pouze na současném stavu.

Definice 4.20. Matici, která obsahuje v každém sloupci (řádku) pravděpodobnosti přechodu od jednoho stavu k druhému, nazveme *maticí přechodu* daného Markovova řetězce.

Definice 4.21. Je-li T matice přechodu daného Markovova řetězce a existuje-li vektor $\vec{v}$ takový, že

$$\vec{v} = T \cdot \vec{v}$$

nazveme vektor $\vec{v}$ *stacionární distribucí (rovnovážným stavem)* Markovova řetězce.

4.3 Soustavy lineárních rovnic

Definice 4.22. *Soustavou (systémem) k lineárních rovnic o n neznámých* $x_1, x_2, \dots, x_n$ rozumíme soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &\ \dots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n &= b_k.
\end{aligned}
$$

Je-li $b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0$, nazývá se takováto soustava *homogenní.*

Řešením soustavy je každá uspořádaná n-tice $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ takových čísel t_1, t_2,..., t_n, která dané soustavě vyhovuje.

Pro každou soustavu vždy nastane právě jedna z následujících možností:

- Soustava rovnic má *právě jedno řešení.*
- Soustava rovnic má *nekonečně mnoho řešení.*
- Soustava rovnic nemá *žádné řešení.*

Definice 4.23. *Maticí soustavy* nazýváme matici

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn}
\end{pmatrix}.
$$

Rozšířenou maticí soustavy nazýváme matici

$$
\bar{A} = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k
\end{pmatrix}.
$$

Soustavu pak můžeme zapsat maticově

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}\,,$$

kde $\vec{x}$ je vektor neznámých a $\vec{b}$ je vektor pravých stran. Píšeme také

$$A \cdot X = B\,.$$

4.3.1 Hodnost matice

Definice 4.24. *Hodnost matice A* je číslo, které je rovno maximálnímu počtu lineárně nezávislých řádků. Označujeme ji $h(A)$.

Je-li A čtvercová matice typu $n \times n$, jejíž hodnost je rovna n, nazýváme ji *regulární* maticí. Je-li $h(A) < n$, nazývá se taková matice *singulární.*

Definice 4.25. Řekneme, že A je *matice ve schodovitém tvaru*, jestliže v matici A každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než předchozí řádek.

Věta 4.26. *Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.*

Věta 4.27 (Frobeniova věta)**.** *Soustava lineárních rovnic má řešení, právě když je hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.*

Věta 4.28. *Soustava k lineárních rovnic o n neznámých má jediné řešení, jestliže je hodnost h matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy a navíc je rovna počtu neznámých n, tedy $h = n$.*

Věta 4.29. *Soustava k lineárních rovnic o n neznámých má nekonečně mnoho řešení, jestliže se hodnost h matice soustavy rovná hodnosti rozšířené matice a navíc je tato hodnost menší než počet neznámých, tj. $h < n$. V tomto případě lze $n - h$ neznámých volit libovolně.*

Příklad 4.30. Jednoduchý makroekonomický model hospodářské politiky
Uvažme jednoduchý model

$$Y = C + I + G + X - M,$$

- kde Y je hrubý domácí produkt,
- C je spotřeba domácností, pro kterou platí
$$C = c(Y - T), \qquad 0 < c < 1,$$
kde $T = tY$, $0 < t < 1$, jsou daňové příjmy,
- I označuje investiční výdaje,
- G jsou celkové vládní výdaje, pro které platí
$$G = T + D,$$
kde D značí deficit státního rozpočtu,
- X je celková hodnota exportu,
- M je velikost importu, pro kterou platí
$$M = mY, \qquad 0 < m < 1\,.$$

Podle Tinbergena má být počet cílů, které si vláda vytyčí, roven počtu nástrojů, které se mají použít. Tedy například má smysl následující otázka. Jak velký rozpočtový deficit můžeme očekávat pokud chceme dosáhnout dané úrovně hrubého národního produktu? Má Tinbergenovo tvrzení nějaké matematické zdůvodnění?

Řešení. Náš příklad je jednoduchý (i tak už jsme museli zavést spousty ekonomických proměnných). Pokud si situaci rozmyslíme, tak vidíme, že máme jen jednu lineární rovnici. Aby byla rovnice jednoznačně řešitelná, můžeme mít jen jednu neznámou. Obecně můžeme díky větě 4.28 říct, že Tinbergenovo tvrzení tedy má smysl. □

4.3.2 Gaussova eliminační metoda

- Soustavu reprezentujeme pomocí matice.
- Matici převedeme do schodovitého tvaru pomocí tzv. *elementárních řádkových úprav*:
    - záměna pořadí řádků,
    - vynásobení libovolného řádku nenulovým číslem,
    - přičtení násobku libovolného řádku k libovolnému řádku,
    - vypuštění řádku, který je složen ze samých nul, je násobkem jiného řádku nebo je lineární kombinací jiných řádků.
- Zpětným dosazením vypočítáme jednotlivé neznámé.

Algoritmus (postup) převodu matice na schodovitý tvar je následující:

1. V prvním kroku převedeme matici do tvaru, kdy má na pozici $(1,1)$ (první řádek a první sloupec) nenulový prvek a_{11} a ostatní prvky v prvním sloupci jsou nulové, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \end{pmatrix},$$

kde na pozici $\star$ stojí nějaké prvky (mohou být nenulové i nulové). Je-li $a_{11} \neq 0$, dosáhneme tohoto tvaru například tak, že první řádek opíšeme, a ke druhému řádku přičteme vhodný násobek prvního řádku tak, aby na pozici $(2,1)$ vznikla nula. Podobně postupujeme s ostatními řádky.

2. V druhém kroku chceme „vytvořit" nuly ve druhém sloupci pod prvkem $\boxed{\star}$. Usilujeme tedy o tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \boxed{\star} & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix}.$$

První dva řádky opíšeme a poté postupujeme obdobně jako v prvním kroku: od třetího řádku odečteme vhodný násobek druhého řádku, totéž pro čtvrtý řádek atd.

3. Postupnými úpravami převedeme matici na schodovitý tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & 0 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \star \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.31.

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x - y + 5z &= 5 \end{aligned}$$

Řešení. Rozšířená matice systému je tvaru

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \end{array}\right).$$

První řádek ponecháme beze změny, k druhému přičteme první a od třetího odečteme dvojnásobek prvního. Dostaneme tak matici

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right).$$

Nyní opíšeme první i druhý řádek a od třetího odečteme trojnásobek druhého. Získáme tak matici

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right).$$

Poslední řádek odpovídá rovnici $-6z = 0$, a proto $z = 0$. Druhý řádek odpovídá rovnici $y + 3z = 1$ a po dosazení $z = 0$ dostaneme $y = 1$. Nakonec první řádek odpovídá rovnici $x - 2y + z = 1$ a po dosazení $y = 1$ i $z = 0$, vypočítáme $x = 3$. Systém má tedy právě jedno řešení $(x, y, z) = (3, 1, 0)$. □

Příklad 4.32.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Řešení. Napíšeme rozšířenou matici systému

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

a obdobně jako v předchozím případě ji převedeme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & -5 & 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \end{array}\right).$$

Vidíme, že hodnost matice systému je rovna hodnosti rozšířené matice systému, ale je menší než počet neznámých ($h = 3$, $n = 4$). Podle věty 4.29 platí, že takový systém má nekonečně mnoho řešení a je možné volit $4 - 3 = 1$ neznámou (dostaneme tzv. volnou neznámou neboli *parametr*). Z posledního řádku dostáváme $6x_4 = -3$, proto $x_4 = -\frac{1}{2}$. Druhý řádek dává rovnost $-5x_2 + x_4 = -8$ a po dosazení za $x_4 = -\frac{1}{2}$ dostáváme $x_2 = \frac{3}{2}$. Nakonec dosadíme za x_2 a x_4 do prvního řádku a dostaneme $x_1 - x_3 = 1$. Této rovnosti zřejmě vyhovuje nekonečně mnoho hodnot x_1, x_3. Zvolme např. x_3 za volnou neznámou, tj. nechť $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Zkoumaný systém rovnic má nekonečně mnoho řešení tvaru

$$x_1 = 1 + t, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = t, \quad x_4 = -\frac{1}{2},$$

kde t je libovolné reálné číslo (parametr). □

Aplikace 4.33. Leontiefův model

Ekonomika regionu se skládá ze tří odvětví: průmysl, zemědělství a služby. Každý sektor produkuje komodity a zdrojem jeho příjmů je prodej těchto komodit, přičemž každý sektor potřebuje vstupní komodity (od sebe i ostatních sektorů):

		výstupy		
		Průmysl	Zemědělství	Služby
vstupy	Průmysl	0,40	0,20	0,20
	Zemědělství	0,20	0,40	0,20
	Služby	0,20	0,10	0,40

Kromě toho existuje externí poptávka v hodnotě 30, 30 a 10 miliard na průmysl, zemědělství a služby. Jak velká musí být produkce jednotlivých odvětví?

Řešení. První řádek tabulky interpretujeme tak, že průmysl spotřebuje 40 % komodit, které sám produkuje, a dále spotřebuje 20 % produktů zemědělství a 20 % produktů služeb. Analogicky můžeme chápat i další řádky a naši ekonomiku tak popsat soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} 0{,}4x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}2x_3 + 30 &= x_1 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}2x_3 + 30 &= x_2 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}4x_3 + 10 &= x_3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 & -30 \\ 0{,}2 & -0{,}6 & 0{,}2 & -30 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & -0{,}6 & -10 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 & -30 \\ 0 & -1{,}6 & 0{,}8 & -120 \\ 0 & 0 & -21{,}6 & -1560 \end{array}\right)$$

$$x_1 = 61{,}11, \qquad x_2 = 111{,}11, \qquad x_3 = 72,22$$

□

Poznámka 4.34. V realitě je situace samozřejmě daleko komplikovanější. Detaily včetně odkazů na statistiky je možno nalézt v [4].

4.4 Determinant

Definice 4.35. *Determinant* $|A|$ čtvercové matice $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ je číslo

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}\,.$$

Determinant $|A|$ čtvercové matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$ je číslo

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}|A_{1n}| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}|A_{1j}|,$$

kde A_{1j} značí matici, která vznikla z matice A odebráním prvního řádku a j-tého sloupce.

Rozepsáním předchozí definice pro čtvercové matice řádu 2 a 3 dostaneme dvě speciální pravidla.

Křížové pravidlo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Sarrusovo pravidlo

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}\end{aligned}$$

Pro výpočet determinantů vyšších řádů můžeme využít i následujícího vztahu:

$$|A| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{l+k}a_{lk}|A_{lk}|, \qquad l \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq l \leq n,$$

ve kterém A_{lk} je matice, která vznikne z matice A vypuštěním l-tého řádku a k-tého sloupce. Tento vztah vlastně říká, že matici je možné tzv. rozvinout podle libovolného řádku. Výpočet determinantu matice řádu n tak převedeme na výpočet n determinantů řádu $n-1$. Podobně můžeme determinant rozvinout i podle libovolného sloupce. Při praktickém výpočtu volíme k rozvoji řádek (sloupec), který obsahuje co nejvíce nul, jelikož pak nemusíme některé příslušné menší determinanty vůbec počítat. Praktický výpočet determinantu matice si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 4.36. Vypočtěte determinanty

$$\text{a)}\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$

Řešení. a) Použijeme Sarrusovo pravidlo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot(-1)\cdot(-1) - 3\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot(-1)\cdot 1 =$$

$$= 2 + 2 + 6 + 3 - 8 + 1 = 6.$$

b) Použijeme rozvoj podle prvního sloupce. Algoritmus výpočtu je vidět z postupu, exponent členu (-1) je roven součtu řádkového a sloupcového indexu, které odpovídají pozici daného čísla.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+0 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-6) = -12.$$

□

V „realitě“ se na to musí jinak

Pro větší determinanty je předchozí postup příliš početně náročný, a tak se postupuje trochu jinak. Všimněme si, jak vyjde determinant, který má hlavní diagonále samé nuly.

Příklad 4.37. Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Řešení. Použijeme-li Sarrusovo pravidlo, dostaneme

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$$

Je tedy vidět, že takovýto determinant je roven součinu prvků na hlavní diagonále. □

Věta 4.38. *Determinant, který má pod hlavní diagonálou samé nuly, je roven součinu prvků v této diagonále.*

Potřebné nuly můžeme v determinantu získat pomocí následujících úprav.

Věta 4.39. *1. Vynásobíme-li libovolný řádek (sloupec) matice číslem k, determinant matice bude k-násobkem determinantu matice původní.*

2. Zaměníme-li pořadí dvou řádků (sloupců) matice, determinant výsledné matice bude mít opačné znaménko než determinant matice původní.

3. Přičtením k-násobku libovolného řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci) se determinant matice nezmění.

Při úpravách není nutné vyrobit nuly všude pod hlavní diagonálou, stačí si příklad jen dostatečně zjednodušit, a pak použít rozvoj determinantu. Tento přístup si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 4.40. Vypočtěte determinant

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Řešení. Pomocí úprav vyrobíme další nuly v posledním sloupci. Přičteme čtyřnásobek posledního řádku k předposlednímu řádku a dvojnásobek posledního řádku k řádku prvnímu:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 10 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

Nyní můžeme snadno determinant rozvinout podle posledního sloupce

$$|A| = 1 \cdot (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -3 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & 10 \end{vmatrix} = -50 - 21 + 8 - 70 - 2 - 60 = -195$$

□

4.5 Inverzní matice a soustavy rovnic

Definice 4.41. Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je čtvercová matice řádu n. Jestliže existuje čtvercová matice A^{-1} řádu n splňující vztahy

$$A^{-1}A = I = AA^{-1},$$

nazýváme matici A^{-1} *inverzní maticí k matici* A.

Inverzní matici lze nalézt ke každé regulární matici.

Věta 4.42. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je čtvercová matice řádu n taková, že k ní existuje A^{-1}. Potom systém lineárních rovnic $A\vec{x} = \vec{b}$ má právě jedno řešení $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ pro libovolné $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.*

Jak inverzní matici najít?

Věta 4.43. *Nechť A je čtvercová matice. Jestli sekvence elementárních řádkových úprav převede matici A na jednotkovou, pak stejná sekvence elementárních řádkových úprav převede jednotkovou matici na A^{-1}.*

Příklad 4.44.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = ?$$

Řešení.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & -24 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & 4 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -15 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & -15 & 10 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 12 & 0 & 0 & 36 & -20 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 16 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

□

Souvislosti

Věta 4.45. *Nechť $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, pak následující výroky jsou ekvivalentní:*

1. *Řádky matice A jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory.*
2. *Sloupce matice A jsou tvořeny lineárně nezávislými vektory.*
3. *K matici A existuje invezní matice A^{-1}.*
4. $|A| \neq 0$
5. *Soustava lineárních rovnic $AX = B$ má pro libovolnou pravou stranu B jediné řešení.*
6. *Homogenní soustava rovnic $AX = 0$ má pouze nulové řešení.*
7. *Každý vektor z $\mathbb{R}^n$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů tvořených řádky (sloupci) matice A a to jednoznačně (až na pořadí).*

4.6 Vlastní čísla a vlastní vektory

Definice 4.46. Nechť A je čtvercová matice, λ je komplexní číslo a $\vec{x}$ je nenulový vektor, který je řešením rovnice

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}. \tag{4.1}$$

Pak se komplexní číslo λ nazývá *vlastní číslo* matice A a vektor $\vec{x}$ se nazývá *vlastní vektor* matice A (příslušný vlastnímu číslu λ).

Úpravou maticové rovnice (4.1) dostaneme

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{o}. \tag{4.2}$$

Aby tato soustava měla nenulové řešení, musí být matice soustava singulární, tj. její determinant musí být nula. Máme tak:

Věta 4.47. *Vlastní čísla matice A jsou řešením tzv. charakteristické rovnice s neznámou λ*

$$|A - \lambda I| = 0\,.$$

Příklad 4.48. Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Sestavíme charakteristickou rovnici

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 7 \\ 7 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

a vypočteme determinant, čímž dostaneme kvadratickou rovnici

$$\lambda^2 - 4\lambda - 45 = 0\,.$$

Jejím řešením jsou vlastní čísla $\lambda_1 = 9$ a $\lambda_2 = -5$.

Vlastní vektor $\vec{v}_1$ příslušný číslu $\lambda_1 = 9$ pak získáme jako jedno (libovolné) řešení soustavy rovnic, kterou získáme dosazením vlastního čísla do (4.2)

$$\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dostaneme $\vec{v}_1 = (1,1)$. Podobně vlastní vektor $\vec{v}_2$ příslušný číslu $\lambda_2 = -5$ je řešením soustavy rovnic

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Máme tak $\vec{v}_2 = (1,-1)\,.$ □

Poznámka 4.49. Vlastní vektory jsou na sebe kolmé. Máme-li tedy jeden, není již obtížné určit druhý (v dimenzi dva).

Příklad 4.50. Vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Řešení. Sestavíme charakteristickou rovnici

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

a vypočteme determinant. Tím dostaneme rovnici

$$(4-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0,$$

jejímž řešením je trojice čísel $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$ a $\lambda_3 = 1$.

Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 4$ pak dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jejím řešením je například vektor $\vec{v}_1 = (1, 0, -1)$. Analogicky bychom našli i vektory příslušné dalším vlastním číslům. □

Věta 4.51 (Perron)**.** *Je-li P čtvercová matice taková, že všechny její koeficienty jsou kladná čísla, pak matice P má kladné reálné vlastní číslo λ_1 a jemu odpovídající vlastní vektor má všechny složky kladné. Navíc je-li λ jiné vlastní číslo, pak $|\lambda| \leq \lambda_1$.*

Aplikace 4.52. Stěhování Předpokládejme, že populace se stěhuje mezi dvěma regiony, např. venkovem a městem, podle následujícího schématu. Každý rok se 50% obyvatel venkova přestěhuje do měst a 25% obyvatel měst se přestěhuje na venkov. Jestli tento vzor migrace bude pokračovat, vyprázdní se venkov, nebo se situace stabilizuje tak, že část obyvatel bude žít ve městě a část na venkově?

Řešení. Z předchozího setkání s tímto příkladem již víme, že hledáme stacionární distribuci matice přechodu (viz definice 4.21).

$$\begin{pmatrix} v_{k+1} \\ m_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_k \\ m_k \end{pmatrix}$$

Pokud existuje, tak je to vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1. V první řadě tedy ověříme, že 1 je vlastním číslem naší matice:

$$\begin{vmatrix} 0{,}5-\lambda & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 0{,}75-\lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 - 1{,}25\lambda + 0{,}25 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0{,}25$$

Nyní nalezneme vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & -0{,}25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v = \frac{1}{3}, m = \frac{2}{3}$$

Vidíme tedy, že nakonec se situace stabilizuje tak, že třetina obyvatel bude žít na venkově a dvě třetiny ve městě. □

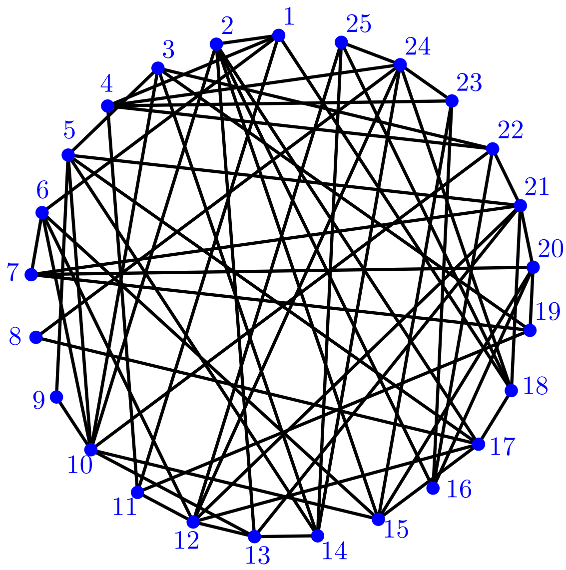
Poznámka 4.53. Zajímavou aplikaci vlastních čísel můžeme najít v [3], kde je použita pro nalezení optimální strategie při mnohostranném vyjednávání při řešení problémů týkajících se veřejných statků.

Ještě jednou se vrátíme k příkladu se sociální sítí. Metrika, která měří i kvalitu kontaktů v tom smyslu, že lepší jsou kontakty, které mají hodně kontaktů, se nazývá *centralita měřená koeficientem vlastního vektoru* (eigenvector centrality). Máme-li graf s n vrcholy, definujeme hodnotu pro vrchol x_v jako

$$x_v = \frac{1}{\lambda} \sum_{t=1}^{n} a_{vt} x_t,$$

kde a_{vt} je příslušný koeficient z matice sousednosti. Přepisem definice do vektorů a matic dostaneme definici vlastního vektoru. Vlastních čísel a tím pádem i vlastních vektorů je více, ale jediný vlastní vektor, pro který je zaručeno, že všechny složky jsou kladné, je podle věty 4.51 vlastní vektor příslušný největší vlastní hodnotě.

Aplikace 4.54. Sociální sítě Kdo je nejvýznamnější postavou v této síti vztahů?



Řešení. Uvážíme matici sousednosti pro naší vztahovou síť

$$\begin{pmatrix}
0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&0&0\\
0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&1&1\\
0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0\\
0&0&1&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0
\end{pmatrix}$$

Pomocí počítače najdeme charakteristickou rovnici

$$
\begin{aligned}
\lambda^{25} - 60\lambda^{23} - 33\lambda^{22} + 1418\lambda^{21} + 1201\lambda^{20} - 17690\lambda^{19}& \\
- 17820\lambda^{18} + 130270\lambda^{17} + 140616\lambda^{16} - 596765\lambda^{15}& \\
- 645895\lambda^{14} + 1744968\lambda^{13} + 1781922\lambda^{12} - 3289284\lambda^{11}& \\
- 2952158\lambda^{10} + 3956100\lambda^{9} + 2846182\lambda^{8} - 2892728\lambda^{7}& \\
- 1481747\lambda^{6} + 1131223\lambda^{5} + 364297\lambda^{4} -& \\
172595\lambda^{3} - 37618\lambda^{2} + 5588\lambda + 1064 = 0&,
\end{aligned}
$$

největší vlastní číslo

$$\lambda_{max} = 5{,}391148524748294$$

i příslušný vlastní vektor

$$
\begin{aligned}
(1, 1{,}396, 1{,}084, 0{,}920, 1{,}306, 1{,}181, 0{,}742, 0{,}479, 0{,}562,& \\
1{,}724, 0{,}829, 1{,}493, 1{,}291, 1{,}084, 1{,}409, 0{,}774, 1{,}326,& \\
1{,}067, 0{,}659, 0{,}899, 1{,}261, 1{,}069, 0{,}808, 1{,}254, 0{,}908)&\,.
\end{aligned}
$$

Největší hodnotu nalezneme na desátém místě, tedy nejvýznamnější je desátý vrchol. □

Poznámka 4.55. Další poznatky týkající se sítí viz [2].

Následující příklad je jednoduchá ukázka toho, jak můžeme modelovat vývoj populace podle věkové struktury. Komplexnější model by pak mohl sloužit například k výpočtům demografických dat pro určení udržitelnosti důchodové modelu apod.

Příklad 4.56. Leslieho model populace
Uvažujme například populaci hmyzu rozdělenou na tři životní etapy: mláďata, mladistvé a dospělé jedince, přičemž každá životní etapa trvá jeden rok. Pravděpodobnost přežití mláďat je 50 % a nerozmnožují se. Mladiství mají pravděpodobnost přežití 25 % a každý z nich má průměrně čtyři mláďata. Dospělí jedinci mají pravděpodobnost přežití 0 % a každý z nich má průměrně tři mláďata. Předpokládejme, že máme 100 samiček, přičemž 40 jsou mláďata, 40 jsou mladiství a 20 dospělí. Jak se bude taková populace samiček vyvíjet v čase?

Řešení. Po jednom roce bude počet mláďat

$$40 \cdot 4 + 20 \cdot 3 = 220.$$

Počet mladistvých bude počet mláďat, která přežijí, tj.

$$40 \cdot 0{,}5 = 20$$

a podobně pro dospělé

$$40 \cdot 0{,}25 = 10.$$

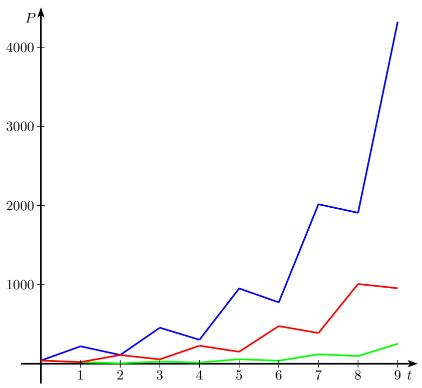
Všechny tyto výpočty můžeme snadno zapsat jednou maticovou rovnicí

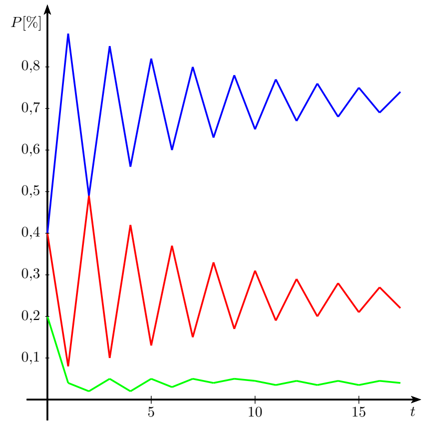
$$L \cdot \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 220 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \vec{x}_1\,.$$

Matice L z předchozího výpočtu se nazývá *Lesliho matice* a můžeme ji snadno použít pro výpočty stavu populace v dalších letech, protože platí

$$\vec{x}_{k+1} = L \cdot \vec{x}_k\,.$$

Vyneseme-li údaje za jednotlivé roky do grafu, tak v grafu pro celkovou populaci vidíme, že populace se ve všech věkových kategoriích zvětšuje, ale nevidíme žádný vzor. V grafu, kde nejsou vyneseny absolutní počty, ale procentuální zastoupení jedinců podle věku v populaci, už ale vidíme, že populace má tendenci mířit do jakéhosi rovnovážného stavu podobného stacionární distribuci Markovova řetězce.





Tento rovnovážný vztah můžeme tedy rovnou určit pomocí vlatních čísel a vektorů. Opět nás zajímá jen takové vlastní číslo, pro které všechny složky příslušného vlatního vektoru vyjdou kladné.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 4 & 3 \\ 0{,}5 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0{,}25 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda + 0{,}375 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = 1{,}5$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1{,}5 & 4 & 3 & 0 \\ 0{,}5 & -1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & -1{,}5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -18 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow (18t, 6t, t)$$

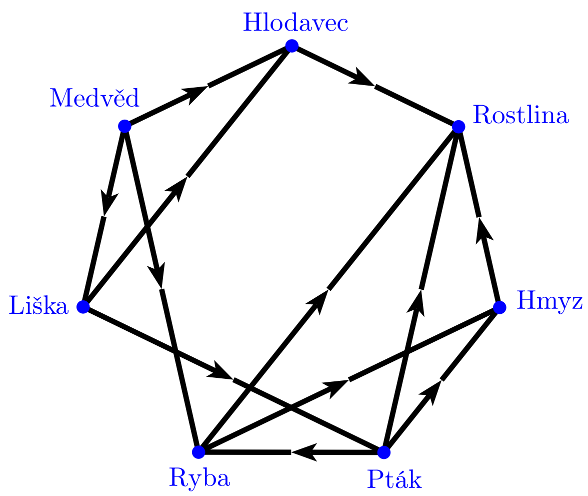
$$72\,\%, \quad 24\,\%, \quad 4\,\%$$

□

Věta 4.57. *Každá Leslieho matice má právě jedno kladné vlastní číslo. Tomuto číslu odpovídá vlastní vektor, jehož všechny složky jsou kladné.*

4.7 Aplikační úlohy k řešení

Příklad 4.58. Potravní řetězec Uvažme následující jednoduchý modelový potravní řetězec



Orientovaná hrana z vrcholu a do vrcholu b znamená, že a má b jako zdroj potravy. Vytvořte matici sousednosti, která popisuje vztahy v tomto řetězci, a pomocí ní odpovězte na následující otázky:

a) Který druh má nejvíce zdrojů potravy?

b) Který druh je nejčastější kořistí?

c) Jestliže b je zdrojem potravy pro a a c je zdrojem potravy pro b, pak řekneme, že c je nepřímým zdrojem potravy pro a. Který druh má nejvíce přímých a nepřímých zdrojů potravy?

d) Předpokládejme, že znečištění zabije rostliny. Jaký bude efekt tohoto znečištění na daný ekosystém?

Příklad 4.59. Leontiefův model Tři městské odbory (životní prostředí, doprava a zdraví) jsou vzájemně provázané. Na produkci každé koruny služeb, které jednotlivé odbory produkují, je nutná část služeb od ostatních odborů:

		výstupy		
		ŽP	Dop	Zdr
	ŽP	0,20	0,10	0,20
vstupy	Dop	0,10	0,10	0,20
	Zdr	0,20	0,40	0,30

Předpokládejme, že ostatní odbory potřebují služby v hodnotě 1 milion od odboru životního prostředí, 1,2 milionu od odboru dopravy a 0,8 milionu od odboru zdraví. Jak velká musí být hodnota vyprodukovaných služeb jednotlivých odborů, aby pokryla poptávku?

Příklad 4.60. Intergenerační sociální mobilita Uvažujme, že společnost je definována jako seskupení lidí tří sociálních tříd: nižší (N), střední (S) a vyšší (V). Uvažujme, že pravděpodobnost začlenění osoby do dané třídy je závislá pouze na třídě, ve které se vyskytoval její rodič. Na základě dlouhodobého pozorování byla shromážděna následující data: je-li rodič ve třídě N, pak dítě bude ve třídě N s pravděpodobností 0,7, ve třídě S s 0,2 a ve třídě V s 0,1. Je-li rodič ve třídě S, pravděpodobnosti přechodu jsou 0,3 (N), 0,5 (S) a 0,2 (V). Pokud je rodič ve třídě V, pak jsou pravděpodobnosti pro zařazení jeho dítěte do jednotlivých tříd 0,1 (N), 0,1 (S) a 0,8 (V).

a) Pro takto definovaný proces sestrojte matici a graf přechodu.

b) Víte-li, že 40 % lidí patří do třídy N, 50 % do třídy S a 10 % do třídy V, určete, jak bude vypadat rozložení společnosti po dvou generacích.

c) Určete, jak bude vypadat rozložení společnosti v dlouhodobém horizontu.

Literatura

[1] F. Aleskerov, H. Ersel, D. Piontkovski; *Linear Algebra for Economists*, Springer, New York, 2011.

[2] A. L. Barabási; *Network Science*, Cambridge University Press, 2015. Dostupné z `http://networksciencebook.com/`.

[3] M. Elliott, B. Golub; A network approach to public goods, *Journal of Political Economy*, **127** (2019), No. 2, 730–776.

[4] *Eurostat Manual of Supply, Use and Input-Output Tables*, Office for Official Publications of the European Communities, Luxembourg, 2008. Dostupné z `https://ec.europa.eu/eurostat/documents/3859598/5902113/KS-RA-07-013-EN.PDF/b0b3d71e-3930-4442-94be-70b36cea9b39`.

[5] J. Hendl, M. Moldan, J. Siegl; *Základy matematiky, logiky a stastistiky pro sociologii a ostatní společenské vědy v příkladech*, Praha: Nakladatelství Karolinum, 2019.

[6] D. Poole; *Linear Algebra, A Modern Introduction, 4th edition*, Cengage Learning, Stamford, 2015.

Kapitola 5

Integrální počet

5.1 Primitivní funkce

Definice 5.1. Nechť funkce f a F jsou definované na intervalu I. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in I,$$

pak říkáme, že funkce F je *primitivní funkcí k funkci f na intervalu I.*

Množinu všech primitivních funkcí k funkci f nazýváme *neurčitý integrál* funkce f a označujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 5.2. *Je-li funkce F primitivní k funkci f na intervalu I, pak každá jiná primitivní funkce k funkci f má tvar $F + c$, kde $c \in \mathbb{R}$.*

Věta 5.3. *Je-li funkce f spojitá na intervalu I, pak k ní na tomto intervalu existuje primitivní funkce.*

5.2 Integrační metody

Věta 5.4. *Nechť na intervalu I existují neurčité integrály $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ a $\int g(x)\,\mathrm{d}x$ a nechť α je libovolná konstanta. Pak na I existuje neurčitý integrál funkce $f + g$ a neurčitý integrál funkce αf a platí*

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x, \tag{5.1}$$

$$\int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x. \tag{5.2}$$

Z definice neurčitého integrálu plyne, že

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x), \qquad \int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c,$$

tj. operace derivování a integrování jsou navzájem komplementární. O správnosti výsledku integrace se můžeme přesvědčit derivováním výsledku – musí nám vyjít zadaná funkce.

Podobně jako pro derivace máme i vzorce pro integrování některých funkcí. Tyto vzorce dostaneme obrácením základních vzorců pro derivování, proto se o jejich správnosti můžeme i přesvědčit, a to derivováním.

Základní vzorce

(1)	$\int 1\,\mathrm{d}x = x + c,$
(2)	$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1,$
(3)	$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x\rvert + c,$
(4)	$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c,$
(5)	$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad a > 0,\ a \neq 1,$
(6)	$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c,$
(7)	$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c,$
(8)	$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c,$
(9)	$\int \frac{1}{(x-x_0)^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + c,$
(10)	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + c,$
(11)	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert x + \sqrt{x^2+a}\rvert + c,$
(12)	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c,$
(13)	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c,$
(14)	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\lvert f(x)\rvert + c.$

Příklad 5.5. Vypočtěte neurčité integrály

a) $\int x^3\,\mathrm{d}x,$

b) $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x,$

c) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x-1} + 2\right)\,\mathrm{d}x,$

d) $\int \frac{1}{2x-5}\,\mathrm{d}x,$

e) $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x,$

f) $\int \operatorname{tg}^2 x\,\mathrm{d}x,$

g) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+9}\,\mathrm{d}x,$

h) $\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x,$

i) $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x,$

j) $\int \frac{x^4}{x^2+9}\,\mathrm{d}x.$

Řešení. a) Užitím vzorce (2) z tabulky dostáváme

$$\int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + c.$$

b) Úpravou a užitím vzorce (2) dostáváme

$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c.$$

c) Rozdělíme na jednotlivé integrály podle věty 5.4, upravíme a použijeme vzorce (2), (14) a (1):

$$\begin{aligned}\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x-1} + 2\right)\mathrm{d}x &= \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + 2\int \mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \ln\lvert x-1\rvert + 2x + c.\end{aligned}$$

d) Upravíme tak, abychom mohli použít vzorec (14) a integrujeme

$$\int \frac{1}{2x-5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x-5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\lvert 2x-5\rvert + c.$$

e) Použijeme vztah mezi goniometrickými funkcemi a upravíme tak, abychom mohli využít vzorce (14):

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln\lvert\cos x\rvert + c.$$

f) Upravíme pomocí vztahů mezi goniometrickými funkcemi a použijeme vzorce (12) a (1):

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \operatorname{tg} x - x + c.\end{aligned}$$

g) Jelikož $(x^2+2x+9)' = 2x+2$, upravíme integrovaný výraz tak, že rozšíříme vhodnou konstantou a použijeme vzorec (14):

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+9| + c\,.$$

h) Můžeme použít vzorec (9) pro $x_0 = 0$ a $a = 3$:

$$\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + c\,.$$

i) Užijeme vzorce (10) pro $a = 3$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{3} + c\,.$$

j) Upravíme danou funkci na součet polynomu a ryze lomené funkce a použijeme vzorce (1), (2) a (9):

$$\int \frac{x^4}{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^2 - 9 + \frac{81}{x^2+9}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 9x + 27\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + c\,.$$

□

Aplikace 5.6. Spotřeba přírodních zdrojů Odhaduje se, že světová spotřeba stříbra (v tisíci tunách) se řídí funkcí $f(t) = 21{,}4\mathrm{e}^{0{,}01t}$, kde t značí počet let, které uběhnou od současnosti. Celkové zásoby stříbra se odhaduji na 400 000 tun. Odhadněte, kdy tyto zásoby stříbra dojdou.

Řešení. Celkovou spotřebu $C(t)$ získáme integrací funkce f

$$C(t) = \int 21{,}4\mathrm{e}^{0{,}01t}\,\mathrm{d}t = 21{,}4\int \mathrm{e}^{0{,}01t}\,\mathrm{d}t = 21{,}4\frac{1}{0{,}01}\mathrm{e}^{0{,}01t} + c = 2140\mathrm{e}^{0{,}01t} + c.$$

Musíme ještě určit integrační konstantu c. Celková spotřeba za prvních nula let musí být nula, tedy víme, že $C(0) = 0$.

$$0 = C(0) = 2140\mathrm{e}^0 + c = 2140 + c \quad \Longrightarrow c = -2140$$

Pro celkovou spotřebu tak dostaneme vztah

$$C(t) = 2140\mathrm{e}^{0{,}01t} - 2140\,.$$

Abychom předpověděli, kdy rezervy ve výši 400 tisíc tun dojdou, musíme vyřešit následující rovnici

$$2140\mathrm{e}^{0{,}01t} - 2140 = 400.$$

Odtud

$$\begin{aligned}2140\mathrm{e}^{0{,}01t} &= 2540\\ \mathrm{e}^{0{,}01t} &= \frac{2540}{2140} \approx 1{,}187\\ \ln \mathrm{e}^{0{,}01t} &= \ln 1{,}187\\ 0{,}01t &= 0{,}171\\ t &= 17{,}1\,\text{let}\end{aligned}$$

□

Věta 5.7 (Metoda per partes). *Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu I. Pak platí*

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 5.8. Vypočtěte

a) $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, b) $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. a) Obecně je pro metodu per partes typické její vícenásobné užití. Zvolme $u = x^2$, $v' = \mathrm{e}^x$. Pak $u' = 2x$, $v = \mathrm{e}^x$ a dostáváme

$$\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x.$$

Pro integrál na pravé straně použijeme opět metodu per partes s analogickou volbou $u = 2x$, $v' = \mathrm{e}^x$. Dostaneme $u' = 2$, $v = \mathrm{e}^x$ a

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x &= x^2\mathrm{e}^x - \int 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &= x^2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + c = (x^2-2x+2)\mathrm{e}^x + c.\end{aligned}$$

b) V tomto případě se zdá, že zde žádný součin funkcí není. Zřejmě ale $\operatorname{arctg} x = 1\cdot\operatorname{arctg} x$, můžeme proto položit $u = \operatorname{arctg} x$, $v' = 1$. Dostaneme $u' = \frac{1}{1+x^2}$, $v = x$ a

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x &= x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c.\end{aligned}$$

□

Věta 5.9 (Substituční metoda). *Nechť funkce f má na intervalu J primitivní funkci F, funkce $t = \varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu I a $\varphi(x)\in J$ pro $x\in I$. Pak má složená funkce $f(\varphi(x))\varphi'(x)$ primitivní funkci na intervalu I a platí*

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + c.$$

Podobně lze použít substituci opačnou, tj. $x = \psi(t)$. Tuto substituční metodu můžeme zapsat ve tvaru

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x = \psi(t)\\ \mathrm{d}x = \psi'(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right| = \int f\big(\psi(t)\big)\psi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 5.10. Vypočtěte neurčité integrály

a) $\int (3x-4)^7\,\mathrm{d}x$, b) $\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int 10x(x^2+13)^{12}\,\mathrm{d}x$, d) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. a) Podobné příklady jsme již řešili přímo pomocí vzorců pro integraci, nyní je můžeme řešit i pomocí substituce. Zaveďme substituci $t = 3x-4$. Pro vyjádření $\mathrm{d}x$ danou substituční rovnici zderivujeme

$$\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t.$$

Dosadíme a integrujeme

$$\int (3x-4)^7\,\mathrm{d}x = \int t^7\,\frac{\mathrm{d}t}{3} = \frac{t^8}{24} + c = \frac{(3x-4)^8}{24} + c.$$

b) Tento typ příkladu jsme již řešili úpravou a užitím vzorce (14), nyní jej vyřešíme pomocí substituce. Použijme substituci $t = x^2 + 1$. Pak $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2x}$, a proto

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{t}\,\frac{\mathrm{d}t}{2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t| + c = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c.$$

c) Proveďme substituci $t = x^2 + 13$. Pak $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2x}$. Po dosazení

$$\begin{aligned}\int 10x(x^2+13)^{12}\,\mathrm{d}x &= \int 10xt^{12}\frac{\mathrm{d}t}{2x} = 5\int t^{12}\,\mathrm{d}t = \frac{5}{13}t^{13} + c = \\ &= \frac{5}{13}(x^2+13)^{13} + c.\end{aligned}$$

d) Zaveďme substituci $t = \ln x$. Pak $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}t$, odtud

$$\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{x}x\,\mathrm{d}t = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}\ln^3 x + c.$$

□

5.3 Definice a základní vlastnosti určitého integrálu

Nechť f je nezáporná ohraničená funkce definovaná na $[a,b]$, která je pro jednoduchost na intervalu $[a,b]$ spojitá. Určeme obsah plochy P ohraničené grafem funkce f, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. Tato plocha se někdy nazývá *podgraf* funkce.

Obsah podgrafu nemůžeme určit přímo, ale můžeme jej vyjádřit přibližně tak, že jej aproximujeme pomocí obdélníčků:

i) Interval $[a,b]$ rozdělíme na n intervalů $[x_{i-1}, x_i]$ (tzv. dělicí intervaly) stejné délky tak, že $x_0 = a$ a $x_n = b$. Délka Δx každého dělicího intervalu je

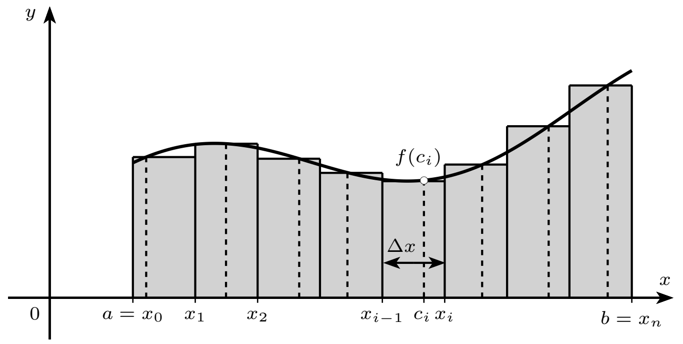
$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

ii) Na každém dělicím intervalu aproximujeme plochu obdélníkem o stranách Δx a $f(c_i)$, kde c_i náleží do dělicího intervalu. Pro obsah P_i tohoto obdélníka platí

$$P_i = f(c_i)\Delta x$$

a součet všech těchto obdélníků přibližně určuje obsah P plochy

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x.$$



Čím větší bude číslo n (počet dělicích bodů), tím přesnější (lepší) bude tato aproximace. Provedeme-li limitní přechod pro $n \to \infty$, dostaneme přesnou hodnotu obsahu plochy

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x. \tag{5.3}$$

Pro spojité funkce tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů c_i. Obecně pro funkce, které nejsou spojité, toto platit nemusí. Pokud však tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů c_i, nazýváme ji určitým integrálem.

Definice 5.11. Nechť f je funkce ohraničená na $[a, b]$. Nechť $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ jsou body dělící interval $[a, b]$ na n stejných subintervalů délky $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ a nechť $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. *Určitým integrálem funkce f od a do b* rozumíme

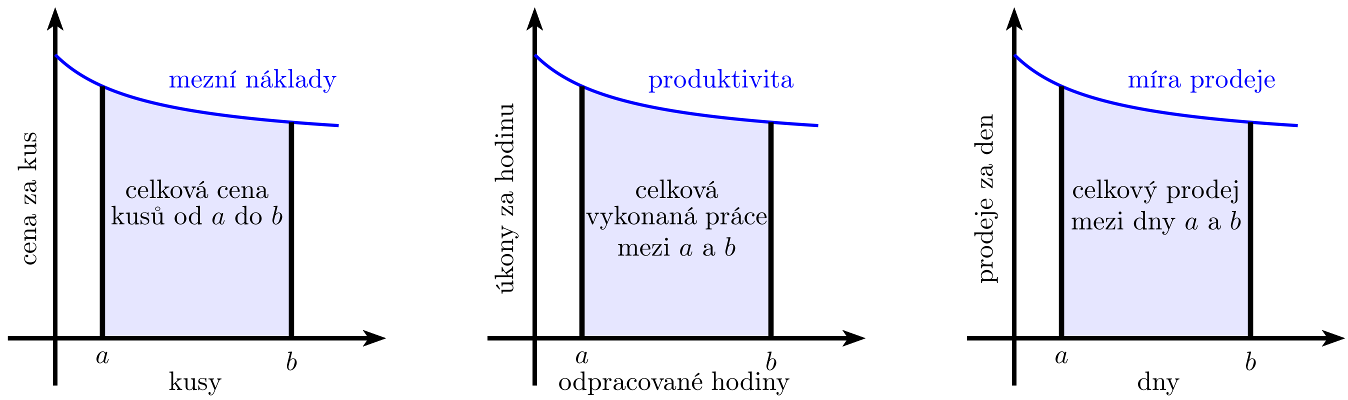
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x,$$

jestliže tato limita existuje a nezávisí na výběru bodů c_i. Píšeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

a říkáme, že funkce f je *integrovatelná* na $[a, b]$.
Číslo a nazýváme *dolní mez*, číslo b *horní mez* a funkci f *integrand*.

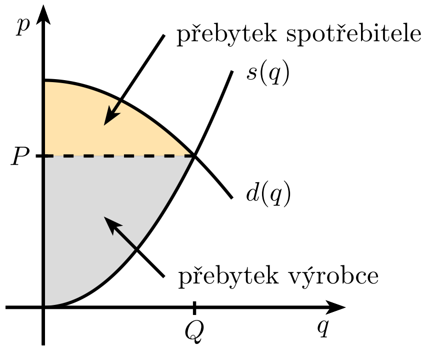
Typické aplikace určitého integrálu



Jelikož určitý integrál vyjadřuje obsah podgrafu, musíme většinou správně interpretovat význam tohoto obsahu. Pomocí integrálu se pak mnohdy definují různé pojmy. V ekonomii se jedná např. o spotřebitelský přebytek a přebytek výrobce.

Aplikace 5.12. Spotřebitelský přebytek a přebytek výrobce
Spotřebitelský přebytek je celkový peněžitý zisk získaný spotřebitely, když jsou schopni pořídit produkt za nižší cenu než je nejvyšší cena, kterou by byli ochotni zaplatit. Spotřebitelský přebytek tedy měři přínos spotřebitele v ekonomice, kde konkurence drží nízkou cenu. Podobně přebytek výrobce je celková částka, kterou získá výrobce, když prodá produkt za vyšší cenu, než je nejnižší cena, za kterou by byl ochotný produkt prodat (a obvykle se dá zhruba ztotožnit se ziskem).

Je-li d funkce popisující křivku poptávky, s funkce popisující křivku nabídky a P cena při množství Q na trhu, pak v případě, kdy dojde k rovnováze na trhu, vypadá situace graficky takto



Je tedy přirozené matematicky definovat spotřebitelský přebytek PS a přebytek výrobce PV jako

$$PS = \int_0^Q (d(q) - P)\,\mathrm{d}q, \qquad PV = \int_0^Q (P - s(q))\,\mathrm{d}q.$$

Věta 5.13 (Newton-Leibnizova formule)**.** *Je-li funkce f spojitá na $[a,b]$, pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{5.4}$$

kde F je primitivní funkce k funkci f na intervalu $[a,b]$.

Často píšeme místo $F(b) - F(a)$ označení $\big[F(x)\big]_a^b$, tj.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

Příklad 5.14. Vypočtěte určité integrály

$$\text{a)} \quad \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x, \qquad\qquad \text{b)} \quad \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1}.$$

Řešení. a) Podle vzorce (5.4) dostáváme

$$\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2.$$

b) Opět podle vzorce (5.4) dostaneme

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \big[\operatorname{arctg} x\big]_{-1}^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

□

Věta 5.15 (Vlastnosti určitého integrálu)**.** *Jsou-li funkce f a g spojité na intervalu $[a,b]$, pak platí tyto vztahy:*

a) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$*;*

b) $\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$*;*

c) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$*, kde* $a < c < b$*;*

d) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$*, jestliže* $f(x) \geq 0$ *na intervalu* $[a,b]$*;*

e) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$*, jestliže* $f(x) \geq g(x)$ *na intervalu* $[a,b]$*.*

Poznámka 5.16. Vlastnost c) lze použít pro případ, kdy je funkce f spojitá na intervalu $[a, c]$ a $[c, b]$, ale není spojitá v bodě c. Například funkce $\operatorname{sgn} x$ není spojitá pro $x = 0$ a přitom můžeme definovat určitý integrál

$$\int_{-2}^{1} \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x = \int_{-2}^{0} \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \operatorname{sgn} x \, \mathrm{d}x = -2 + 1 = -1.$$

Poznámka 5.17. Integrál $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$ pro $a > b$ definujeme vztahem

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x) \, \mathrm{d}x,$$

a integrál $\int_a^a f(x) \, \mathrm{d}x$ definujeme vztahem

$$\int_a^a f(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Definujeme-li pro každé číslo $x \in [a, b]$ funkci

$$U(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t,$$

pak derivace této funkce je $U'(x) = f(x)$ a $U(a) = 0$. Tímto způsobem někdy vyjadřujeme funkce, které jsou primitivní k funkci f, ale nejsou elementárními funkcemi, např. funkce

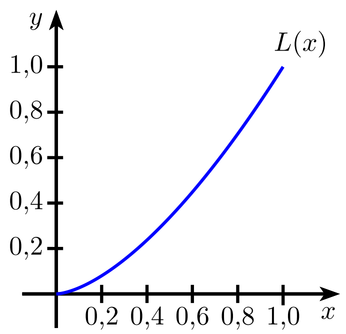
$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t, \qquad \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t.$$

Tyto funkce se nazývají transcendentní.

Aplikace 5.18. Lorenzova křivka a Giniho index
Pro měření nerovnosti ekonomové počítají jaká část celkového příjmu je získána nejchudšími dvaceti procenty populace, nejchudšími čtyřiceti procenty populace atd. Například pro Českou republiku v roce 2018 tato data vypadala takto

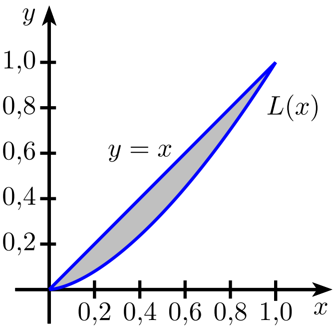
část populace	část příjmů
0,2	0,102
0,4	0,249
0,6	0,426
0,8	0,646
1,0	1,000

Graficky tato data reprezentuje tzv. *Lorenzova křivka* $L(x)$, která udává, jaká část celkového příjmu je získána nejchudší částí x populace. Pro naše data je její přibližná rovnice $L(x) = x^{1{,}57}$.



Absolutní rovnost příjmů znamená, že všichni vydělávají stejně, tj. dolních 10 % získá 10 % všech příjmů, dolních 20 % získá 20 % všech příjmů atd. Lorenzova křivka v tomto případě je tedy graf lineární funkce $y = x$.

Ke změření nerovnosti spočítáme obsah oblasti mezi aktuální Lorenzovou křivkou $L(x)$ a její ideální verzí $y = x$ a tento výsledek vynásobíme dvěma, abychom dostali číslo mezi 0 (absolutní rovnost) a 1 (absolutní nerovnost). Tomutu číslu se říká *Giniho index*.



Matematicky tedy definujeme Giniho index jako

$$GI = 2\int_0^1 (x - L(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Pro Českou republiku dostaneme

$$GI = 2\int_0^1 (x - L(x))\,\mathrm{d}x = GI = 2\int_0^1 \left(x - x^{1{,}57}\right)\mathrm{d}x = 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^{2{,}57}}{2{,}57}\right]_0^1 = 0{,}22\,.$$

Aplikace 5.19. Paretův zákon
Ekonom Vilfredo Pareto odhadl, že počet lidí, jejichž příjem je mezi A a B jednotkami měny je dán určitým integrálem

$$\int_A^B (ax)^{-b}\,\mathrm{d}x \qquad (b \neq 1),$$

kde a a b jsou konstanty, přičemž a je hodnota nejmenší možné mzdy. Určete hodnotu tohoto integrálu.

Řešení. Stačí použít jen základní pravidla a Newton-Leibnizovu formuli

$$\begin{aligned}\int_A^B (ax)^{-b}\,\mathrm{d}x &= a^{-b}\int_A^B x^{-b}\,\mathrm{d}x = a^{-b}\left[\frac{x^{-b+1}}{-b+1}\right]_A^B = \\ &= \frac{a^{-b}}{-b+1}\left(B^{-b+1} - A^{-b+1}\right)\end{aligned}$$

□

Poznámka 5.20. Z předchozího zákonu plyne i známý Paretův princip (pro něj je ale nutné dobře zvolit konstantu b o hodnotě $b = \log_4 5 \approx 1{,}16$).

Numerická integrace

Věta 5.21 (Lichoběžníkové pravidlo)**.** *Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$. Rozdělme interval na n intervalů stejné délky h a krajní body těchto intervalů označme po řadě $x_0, x_1, \dots, x_n$ a jim odpovídající funkční hodnoty funkce f po řadě $y_0, y_1, \dots, y_n$. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)\,.$$

Střední hodnota

Nechť f je funkce definovaná a integrovatelná na uzavřeném intervalu $[a, b]$. Číslo μ definované vztahem

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

se nazývá *střední hodnota* funkce f na intervalu $[a, b]$.

Střední hodnota je vlastně zobecnění aritmetického průměru pro čísla. Geometricky je střední hodnota výška obdélníku, který má základnu tvořenou intervalem $[a, b]$ a obsah $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

5.4 Metoda per partes a substituce pro určité integrály

Věta 5.22 (Metoda per partes pro určitý integrál)**.** *Nechť funkce $u(x)$ a $v(x)$ mají spojité derivace na intervalu $[a, b]$. Pak platí*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 5.23 (Substituce pro určitý integrál)**.** *Nechť funkce $f(t)$ je spojitá na intervalu $[a, b]$. Nechť funkce $\varphi(x)$ má spojitou derivaci na intervalu $[\alpha, \beta]$ a $\varphi(x)$ zobrazuje interval $[\alpha, \beta]$ do intervalu $[a, b]$. Pak platí*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Tato věta říká, že při substituci určitého integrálu je třeba také změnit meze!

Příklad 5.24. Vypočtěte určité integrály

$$\text{a)}\quad \int_1^{\mathrm{e}} x^3 \ln x\,\mathrm{d}x, \qquad\qquad \text{b)}\quad \int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. a) Použijeme metodu per partes. Zvolme $u = \ln x$, $v' = x^3$. Pak $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{x^4}{4}$ a dostáváme

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^3 \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{4}\int_1^{\mathrm{e}} x^3\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^4}{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{3\mathrm{e}^4+1}{16}.$$

b) Použijeme substituci

$$t = \sqrt{1+3x}.$$

Pak $t^2 = 1 + 3x$, odkud $x = \frac{1}{3}(t^2 - 1)$ a $\mathrm{d}x = \frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$. Nové meze vypočteme dosazením do substituční rovnice za $x = 0$ a $x = 5$. Dostaneme $0 \rightsquigarrow 1$ a $5 \rightsquigarrow 4$ a vypočteme určitý integrál

$$\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\mathrm{d}x = \frac{2}{9}\int_1^4 (t^2-1)\mathrm{d}t = \frac{2}{9}\left[\frac{t^3}{3} - t\right]_1^4 = 4.$$

□

5.5 Aplikační úlohy k řešení

Příklad 5.25. Kapitálová hodnota CV majetku (ropný vrt, důl apod.), který produkuje stálý příjem, je součtem jeho současné hodnoty a všech budoucích příjmů z tohoto majetku. Proto je přirozené, že tuto hodnotu můžeme spočítat jako

$$CV = \int_0^T r(t)\mathrm{e}^{-it}\,\mathrm{d}t,$$

kde $r(t)$ značí roční příjem, i spojitou úrokovou míru a T je předpokládaná životnost v letech. Použijte tento vztah a určete hodnotu ropného vrtu, u něhož se předpokládá, že bude generovat 240 000 dolarů po příštích deset let a úrokové míře 6 %.

Příklad 5.26. Roční import země je $I(t) = 30\mathrm{e}^{0{,}2t}$ a její export je $E(t) = 25\mathrm{e}^{0{,}1t}$, obojí v miliardách dolarů. Čas t je měřen v letech a $t = 0$ odpovídá roku 2020. Jaký bude akumulovaný deficit zahraničního obchodu této země za následujících deset let?

Příklad 5.27. Pro Spojené státy americké v roce 2018 byla Lorenzova křivka přibližně $L(x) = x^{2{,}8}$. Vypočtěte Giniho index pro Spojené státy americké a rozhodněte, zda-li je tato země více nebo méně rovnostářská než Česká republika.

Kapitola 6

Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice je rovnice, v níž roli neznámé hraje funkce a která zároveň obsahuje derivace hledané funkce.

Řešit diferenciální rovnici znamená nalézt všechny funkce, které jsou definované na nějakém intervalu I a vyhovují dané rovnici. Takovou funkci nazýváme *řešením diferenciální rovnice.*

Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje.

Například rovnice

$$y' = y$$

je tedy diferenciální rovnice prvního řádu. Jejím řešením je funkce $y = \mathrm{e}^x$, protože $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$. Snadno se dá ověřit, že řešením jsou všechny funkce tvaru $y = C\mathrm{e}^x$, kde C je libovolná konstanta.

Obecné řešení diferenciální rovnice prvního řádu je funkce závisející na jednom parametru C taková, že speciální volbou C lze získat každé řešení této rovnice. *Partikulární řešení* je jedno konkrétní řešení získané z obecného řešení volbou konstanty C.

Průběh nějakého skutečného jevu je popsán jediným řešením. Z množiny všech řešení určíme toto řešení zadáním *počáteční podmínky.* Úloha najít řešení diferenciální rovnice splňující danou počáteční podmínku se nazývá *počáteční úloha* (někdy také Cauchyova počáteční úloha). V praktických aplikacích hraje často roli nezávislé proměnné x čas. Často je proto přirozené hledat řešení diferenciálních rovnic pro $x \geq 0$.

6.1 Rovnice se separovanými proměnnými

Jde o rovnici tvaru

$$y' = f(x)g(y), \tag{6.1}$$

kde f a g jsou spojité funkce. Dosadíme $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$

Nejprve si všimněme, že konstantní funkce určené rovnicí $g(y) = 0$ jsou řešením rovnice (6.1). Za předpokladu $g(y) \neq 0$ *separujeme* proměnné (tj. na jedné straně rovnice máme výraz pouze proměnné y a na druhé výraz pouze proměnné x)

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

a tuto rovnost integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6.2}$$

Nezapomeňme, že primitivní funkce se liší o konstantu, čímž dostaneme množinu řešení rovnice (6.1)! Tato množina řešení a konstantní řešení z předchozího kroku pak tvoří obecné řešení rovnice (6.1). Máme-li zadanou počáteční podmínku, určíme tuto konstantu z počáteční podmínky.

Poznamenejme, že ne vždy se nám podaří z (6.2) vyjádřit explicitní tvar řešení $y = y(x)$.

Příklad 6.1. Řešte diferenciální rovnice

$$\text{a)} \quad y' = 2xy, \qquad\qquad \text{b)} \quad y' = \frac{1}{x}(4y-1).$$

Řešení. a) Rovnici přepíšeme do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy,$$

a odtud za předpokladu, že $y \neq 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\,\mathrm{d}x.$$

Všimněme si přitom, že funkce $y = 0$ je řešením původní rovnice. Integrací dostáváme

$$\ln|y| = x^2 + K.$$

Po odlogaritmování máme

$$|y| = \mathrm{e}^{x^2+K} = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{K}$$

a odtud

$$y = \pm\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^{K}.$$

Označíme-li $C = \pm\mathrm{e}^K$, kde C je kladné nebo záporné číslo, dostaneme obecné řešení tvaru

$$y = C\mathrm{e}^{x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme, že pro $C = 0$ je v tomto vztahu zahrnuto i řešení $y = 0$.

b) Nejprve vyšetřeme případ $4y - 1 = 0$. Vidíme, že funkce $y = \frac{1}{4}$ je řešením naší rovnice. Za předpokladu $y \neq \frac{1}{4}$ dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{4y-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

a po integraci

$$\frac{1}{4}\ln|4y-1| = \ln|x| + \ln K,$$

kde K je kladná konstanta. Užitím pravidel pro počítání s logaritmy pak dostaneme

$$\ln|4y-1| = \ln K^4x^4.$$

Nahradíme-li po odlogaritmování kladnou konstantu K^4 libovolnou konstantou C, můžeme odstranit absolutní hodnoty a dostaneme

$$4y - 1 = Cx^4,$$

a odtud

$$y = \frac{1}{4}Cx^4 + \frac{1}{4}.$$

Tento vztah zahrnuje i řešení $y = \frac{1}{4}$. □

Příklad 6.2. Řešte počáteční úlohu

$$(x+1)\,\mathrm{d}y - xy\,\mathrm{d}x = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Řešení. Separujeme proměnné a za předpokladu $y \neq 0$ máme

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{x+1}.$$

Funkce na pravé straně je neryze lomená funkce. Dělením ji převedeme na polynom a ryze lomenou racionální funkci a integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x.$$

Dostáváme tak
$$\ln|y| = x - \ln|x+1| + C.$$
Označme $C = \ln K$. Vzhledem k tomu, že platí $x = \ln \mathrm{e}^x$, dostaneme
$$\ln|y| = \ln \mathrm{e}^x - \ln|x+1| + \ln K, \qquad K > 0,$$
a užitím pravidel pro počítání s logaritmy
$$\ln|y| = \ln \frac{K\mathrm{e}^x}{|x+1|}.$$
Nyní můžeme odlogaritmovat a uvážíme-li novou konstantu $K^\star \in \mathbb{R}$, můžeme vynechat absolutní hodnoty. Dostaneme tak řešení dané rovnice ve tvaru
$$y = \frac{K^\star \mathrm{e}^x}{x+1}.$$
Toto řešení obsahuje i řešení $y = 0$. Aby byla splněna počáteční podmínka, musí platit
$$1 = \frac{K^\star \mathrm{e}^0}{0+1} \Rightarrow K^\star = 1.$$
Řešením počáteční úlohy je funkce $y = \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$. □

Aplikace 6.3. Jednoduchý model osobních úspor
Zdrojem osobního majetku jsou typicky dva zdroje. Plat a výnosy z investic. Z těchto příjmů můžeme rozlišit tři základní typy výdajů. Nutné výdaje, zbytné výdaje a investice. Pro jednoduchost můžeme uvažovat, že po zaplacení nutných výdajů, utratíme fixní část zbylých příjmů za zbytné výdaje a zbylou část investujeme. Dále uvažujme, že investice generují příjem s fixním úrokem a na začátku máme nulové úspory. Popište matematicky tento model a nalezněte funkci, která popisuje velikost úspor v čase.

Řešení. Nejprve si označme všechny veličiny v našem modelu:

- s plat
- $W(t)$ úspory v čase t
- r velikost úročení investic
- n nezbytné výdaje
- p velikost části příjmů, které utratíme za zbytné výdaje

Změna velikost našich úspor je součet všech našich příjmů mínus všechny naše výdaje, tj.
$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = s + rW - (n + p(s + rW - n)),$$
což můžeme upravit do tvaru
$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = (1-p)(s - n + rW).$$
Podmínka nulových úspor na začátku znamená $W(0) = 0$. Vidíme, že se jedná o rovnici se separovanými proměnnými. Odseparujeme proměnné
$$\frac{\mathrm{d}W}{s - n + rW} = (1-p)\mathrm{d}t$$
a po malé úpravě budeme moci integrovat pomocí základních vzorců
$$\frac{1}{r}\int \frac{r\,\mathrm{d}W}{s - n + rW} = \int (1-p)\mathrm{d}t$$

$$\ln(s-n+rW)=(1-p)rt+c.$$

Algebraickými úpravami dostaneme obecné řešení

$$W=\frac{1}{r}(K\mathrm{e}^{(1-p)rt}+n-s).$$

Dosazením počáteční podmínky dostaneme rovnici

$$0=K+n-s$$

a odtud $K=s-n$. Náš model tak je

$$W=\frac{s-n}{r}(\mathrm{e}^{(1-p)rt}-1)$$

Můžeme nyní třeba odpovědět na otázku, jak se změní naše úspory, když se podíl nezbytných výdajů sníží z 80 % na 70 % apod. □

Aplikace 6.4. Tři jednoduché modely růstu
V mnoha případech je růst veličiny přímo úměrný jeho současnému množství. Tímto způsobem se chová populace zvířat nebo růst buněk při malém množství, ale také například úročení na bankovním účtu. Označíme-li pozorovanou veličinu y, můžeme tento model popsat diferenciální rovnicí

$$y'=ay,\qquad a>0.$$

Pro úplnost je nutné doplnit i počáteční podmínku (velikost pozorované veličiny na začátku)

$$y(0)=k,\qquad k>0.$$

Rovnici můžeme vyřešit separací proměnných

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ay$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int a\,\mathrm{d}t$$

$$\ln y=at+C$$

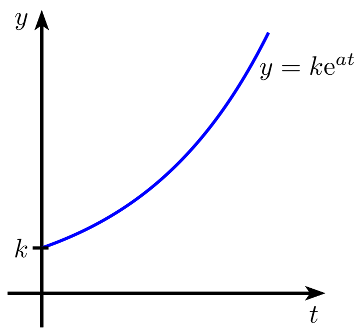
$$y=\mathrm{e}^{at+C}=\mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{C}=c\mathrm{e}^{at}$$

Dosazením počáteční podmínky dostaneme

$$y(0)=c\mathrm{e}^{0}=k\quad\Longrightarrow\quad c=k.$$

Řešením počáteční úlohy tedy je funkce

$$y=k\mathrm{e}^{at}.$$



Žádná reálná populace ovšem nakonec neroste donekonečna. Omezení místa nebo zásob jídla nakonec růst zpomalí. Jestliže veličina nemůže růst nad nějakou určitou mez M, potom je rozumné například uvažovat, že rychlost růstu je přímo úměrná tomu, jak moc je daná veličina daleko od svého limitu. Tento model je vhodný například i pro popis šíření informací produkovaných médii nebo pro popis prodeje výrobku, který je podpořen reklamou.

Matematicky můžeme tento model popsat rovnicí

$$y' = a(M - y).$$

Opět doplníme počáteční podmínku $y(0) = k$ a rovnici vyřešíme. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými a řešíme ji podobně jako v předchozím případě:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = a(M - y)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{M - y} = \int a\,\mathrm{d}t$$

$$\ln(M - y) = -at - C$$

$$M - y = \mathrm{e}^{-at-C} = c\mathrm{e}^{-at}$$

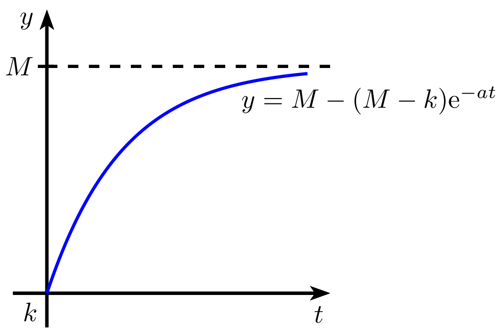
$$y = M - c\mathrm{e}^{-at}$$

Po dosazení počáteční podmínky dostaneme

$$y(0) = M - c\mathrm{e}^{0} = M - c = k \quad \Longrightarrow \quad c = M - k$$

a počáteční problém je tedy vyřešen funkcí

$$y = M - (M - k)\mathrm{e}^{-at}.$$

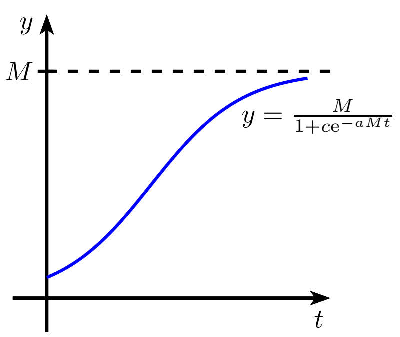


Pokud bychom chtěli komplexnější model populace, případně jednoduchý model epidemie, mohli bychom uvažovat, že rychlost růstu dané veličiny je přímo úměrná její současné velikosti a zároveň její vzdálenosti od od horního limitu M. Dostaneme tak diferenciální rovnici

$$y' = ay(M - y).$$

Jedná se opět o rovnici se separovanými proměnnými (kterou je již složitější vyřešit) a jejím řešením je funkce

$$y = \frac{M}{1 + c\mathrm{e}^{-aMt}}.$$



6.2 Lineární diferenciální rovnice

Jde o rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{6.3}$$

kde p a q jsou spojité funkce.

Předepíšeme-li počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, pak má lineární rovnice (6.3) právě jedno řešení, a to existuje na celém intervalu, kde jsou funkce p, f spojité.

Budeme hledat takovou funkci $I(x)$, že když jí vynásobíme rovnici (6.3), bude na levé straně derivace součinu $I(x)y$, tj.

$$I(x)(y' + p(x)y) = (I(x)y)'\,. \tag{6.4}$$

Podaří-li se nám takovou funkci najít, bude rovnice (6.3) ve tvaru

$$(I(x)y)' = I(x)q(x)$$

a integrováním obou stran obdržíme

$$I(x)y = \int I(x)q(x)\,\mathrm{d}x + c.$$

Dále již získáme hledané řešení rovnice (6.3)

$$y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)q(x)\,\mathrm{d}x + c\right].$$

Pokusme se tedy najít vhodnou funkci I. V rovnici (6.4) roznásobíme levou stranu a na pravé straně použijeme pravidlo pro derivaci součinu a dostáváme

$$I(x)y' + I(x)p(x)y = I'(x)y + I(x)y'$$

a odtud

$$I(x)p(x) = I'(x).$$

Dostali jsme tak rovnici se separovanými proměnnými, kterou vyřešíme:

$$\int \frac{\mathrm{d}I}{I} = \int p(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\ln|I| = \int p(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$I \;= K\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Jelikož hledáme jednu konkrétní funkci I, zvolíme $K = 1$ a dostáváme

$$I(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Takovouto funkci $I(x)$ nazýváme *integrační faktor*. Pro nalezení řešení lineární diferenciální rovnici (6.3) vynásobíme obě strany *integračním faktorem*

$$I(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

čímž dostaneme rovnici ve tvaru

$$\left(y\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\right)' = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

a obě strany této rovnice zintegrujeme. Dostaneme tak řešení

$$y(x) = \left(\int g(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + c\right)\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Tento vzorec si samozřejmě nemusíme pamatovat, stačí jen znát tvar integračního faktoru.

Příklad 6.5. Najděte obecné řešení rovnice

$$\text{a)} \quad y' - 2y = x, \qquad\qquad \text{b)} \quad y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Řešení. a) Určíme integrační faktor $I = \mathrm{e}^{\int -2\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2x}$ a vynásobíme jím danou rovnici, dostaneme tak

$$y'\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-2x}y = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

Rovnici upravíme do tvaru

$$\left(y\mathrm{e}^{-2x}\right)' = x\mathrm{e}^{-2x}$$

a integrujeme obě strany, přičemž pro pravou stranu použijeme metodu per partes:

$$y\mathrm{e}^{-2x} = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x} + C.$$

Odtud získáme obecné řešení ve tvaru

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + C\mathrm{e}^{2x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

b) Určíme integrační faktor $I = \mathrm{e}^{\int 2x\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x^2}$. Vynásobením rovnice a úpravou dostaneme

$$\left(y\mathrm{e}^{x^2}\right)' = x.$$

Integrováním obou stran dostaneme

$$y\mathrm{e}^{x^2} = \frac{x^2}{2} + C$$

a odtud obecné řešení rovnice je

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

□

Příklad 6.6. Řešte počáteční úlohu

$$x^3y' - 2x^2y = 4, \qquad y(1) = -2.$$

Řešení. Rovnici upravíme do tvaru

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{4}{x^3}.$$

Vypočteme integrační faktor

$$I = \mathrm{e}^{\int -\frac{2}{x}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2\ln x} = \mathrm{e}^{ln\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}.$$

Vynásobením rovnice a úpravou dostaneme

$$\left(y\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{4}{x^5}.$$

Integrujeme obě strany rovnice

$$y\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^4}$$

a získáme obecné řešení rovnice ve tvaru $y = Cx^2 - \frac{1}{x^2}$. Dosazením počáteční podmínky dostáváme $-2 = C - 1$ a odtud $C = -1$. Řešením počáteční úlohy je funkce

$$y = -x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

□

Aplikace 6.7. Ponziho schéma
Ponziho schéma je investiční podvod, který slibuje velkou návratnost investic, ale místo skutečného investování jsou svěřené prostředky použity na vyplácení zisku investorů. Aby nedošly finanční prostředky, je nutné neustále zvyšovat příliv nových investorů, schéma tedy nakonec musí zkolabovat. Pokusíme se najít rovnici, která popisuje počet nutných investorů.

Předpokládejme, že máme na začátku 10 investorů, přičemž každý vloží do fondu 100 000 Kč a je mu slíbena 20 % návratnost investice každý měsíc. Z vloženého milionu tak vyplatíme každému investorovi 20 000 Kč a zbylých 800 000 Kč si necháme. Označme y počet investorů, které potřebujeme, abychom mohli investory nadále vyplácet a přitom si pokaždé nechat částku 800 000 Kč.

Budeme-li částky uvažovat v tisících, pak máme

$$\begin{aligned} \text{příjem} &= 100\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ \text{výdej} &= 20y + 800. \end{aligned}$$

Příjmy a výdaje musí být v rovnováze a navíc víme, že na začátku máme deset investorů. Dostaneme tak počáteční problém

$$100\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 20y + 800, \qquad y(0) = 10.$$

Jedná se o lineární diferenciální rovnici, jejíž integrační faktor je

$$I = \mathrm{e}^{\int -0{,}2\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-0{,}2t}$$

Po vynásobení a úpravě dostaneme

$$\left(y\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right)' = 8\mathrm{e}^{-0{,}2t}.$$

Integrováním a úpravou pak získáme obecné řešení

$$y = c\mathrm{e}^{0{,}2t} - 40.$$

Dosazením počáteční podmínky určíme konstantu c

$$10 = c\mathrm{e}^{0} - 40 \quad \Longrightarrow \quad c = 50$$

a dostaneme řešení našeho počátečního problému

$$y = 50\mathrm{e}^{0{,}2t} - 40.$$

Tedy například po jednom roce bychom potřebovali $y(12) \approx 511$ investorů.

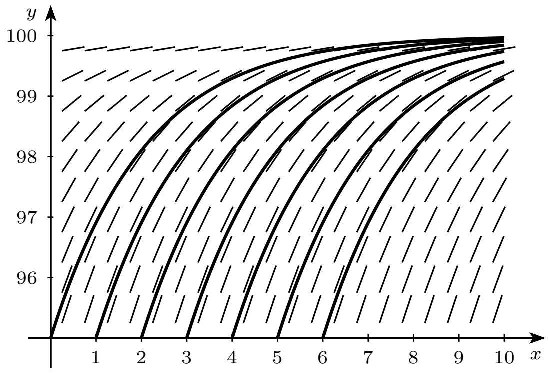
6.3 Geometrická interpretace

V mnoha případech není možné najít explicitní vyjádření hledaného řešení. V případě, kdy je daná rovnice tvaru

$$y' = f(x, y),$$

můžeme získat nějaké informace o hledaném řešení díky geometrické interpretaci dané rovnice.

Diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ přiřazuje bodu $[x, y]$ v rovině právě jednu hodnotu $y'(x)$, neboli hodnotu derivace hledané funkce. Tuto hodnotu můžeme chápat jako směrnici přímky procházející bodem $[x, y]$. Tuto přímku obvykle znázorňujeme jako krátkou úsečku se středem v daném bodě $[x, y]$ a směrnicí $y'(x)$. Tato úsečka se nazývá *lineární element*. Množinu všech lineárních elementů diferenciální rovnice nazýváme *směrové pole*. Graf každého řešení $\varphi(x)$ dané diferenciální rovnice, tzv. *integrální křivka*, má zřejmě tu vlastnost, že tečna v každém jeho bodě $[x, \varphi(x)]$ obsahuje příslušný lineární element. Směrové pole nám tak pomáhá zobrazit tvar hledaných integrálních křivek tím, že ukazuje směr, v kterém křivka prochází každým bodem.



Směrové pole rovnice $y' = \frac{1}{2}y\left(1 - \frac{1}{100}y\right)$ a řešení pro různé počáteční podmínky

6.4 Numerické řešení počáteční úlohy

Kromě geometrické interpretace můžeme najít i přibližné řešení rovnice pomocí tzv. *numerických metod.* Nejjednodušší metodou numerického řešení počáteční úlohy je *Eulerova metoda.* Základní myšlenkou této metody je aproximace řešení lomenou čarou.

Uvažujme počáteční úlohu

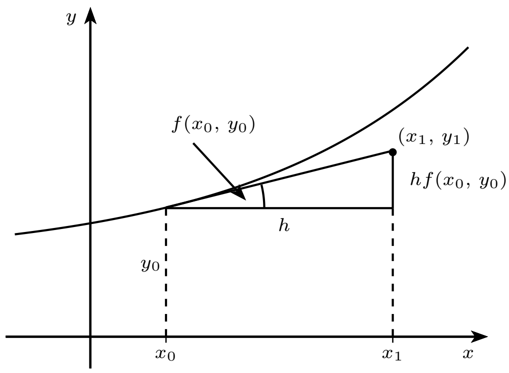
$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Budeme hledat přibližné hodnoty tohoto řešení v rovnoměrně vzdálených bodech

$$x_0, \quad x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_1 + h, \ldots,$$

kde h se nazývá dělicí krok.

Podobně jako u směrového pole si všimneme, že nám rovnice $y' = f(x, y)$ udává hodnotu směrnice tečny v bodě $[x_0,\, y_0]$, která je $y' = f(x_0, y_0)$, což nám umožní odhadnout hodnotu řešení v bodě x_1.



Pomocí obrázku můžeme odvodit, že hodnota v bodě x_1 je tak přibližně rovna

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Známe-li hodnotu v bodě x_1, můžeme přibližně vyjádřit hodnotu v x_2 atd. Celkově můžeme Eulerovu metodu shrnout následovně:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Samozřejmě dnes již nikdo tyto výpočty neprovádí ručně.

6.5 Aplikační příklady

Příklad 6.8. Sbírka umění byla pořízena za cenu 400 000 Kč a předpokládá se, že její hodnota poroste každý rok o 5 %. Jak vypadá diferenciální rovnice, která modeluje hodnotu sbírky v čase? Jaká bude hodnota sbírky za 10 let?

Příklad 6.9. Je-li nějaká zpráva opakovaně vysílána médii, tak se v první fázi šíří rychle, ale postupně již pomaleji, jelikož většina lidí již zprávu zná. Sociologové často předpokládají, že rchlost šíření zprávy je pak přímo úměrná počtu osob, které tuto zprávu ještě neslyšely. Uvažujme, že máme město s 50 000 obyvateli, přičemž na začátku danou zprávu nezná nikdo a po dvou hodinách polovina obyvatel. Kolik obytel bude zprávu znát za 6 hodin? A kdy bude se zprávou seznámeno 90 % obyvatel?

Příklad 6.10. Spalování fosilních paliv je zodpovědné za zvyšení množství oxidu uhličitého, který je pravděpodobně jednou z příčin zvyšení globální teploty. V současnosti je v atmosféře přibližně 3200 miliard tun oxidu uhličitého a jeho množství roste každoročně o 50 miliard tun, přičemž pouze 1 % z akumulovaného množství se každoročně odstraní přírodními procesy. Namodelujte množství oxidu uhličitého v čase pomocí diferenciální rovnice a určete, kdy bude v atmosféře 4000 miliard tun oxidu uhličitého (jedná se o množství, při kterém by mělo dojít ke zvýšení teploty o dva stupně Celsia). Jaké bude dlouhodobé množství oxidu uhličitého v atmosféře?