

PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ
APLIKACE DERIVACE

PŘÍKLAD 1: Určete lokální extrémy funkce

a) $y = -x^3 - 9x^2 - 15x$,

b) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$,

c) $y = \frac{x}{x^2+1}$.

PŘÍKLAD 2: Určete intervaly, ve kterých je daná funkce konvexní, konkávní a určete inflexní body, pokud existují.

a) $y = -x^3 + 3x^2 + 45x - 12$,

b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$

PŘÍKLAD 3: Funkce vyjadřující zisk firmy (v tisících) je dána vztahem

$$P(Z) = -\frac{1}{4}Z^2 + 12Z, \quad Z \in [0, 100],$$

kde Z je počet zákazníků. Vypočítejte $P(20)$, $P'(20)$ a $P''(20)$ a vysvětlete, co nám tato čísla říkají o zisku firmy.

PŘÍKLAD 4: Funkce vyjadřující velikost produkce firmy je dána vztahem

$$Q(L) = 12L - \frac{1}{20}L^2, \quad L \in [0, 200],$$

kde L je počet pracovníků. Jaká velikost pracovní síly maximalizuje velikost produkce?

VÝSLEDKY

PŘÍKLAD 1:

- a) lokální minimum v bodě $x = -5$ hodnoty -25 , lokální maximum v bodě $x = -1$ hodnoty 7 ;
- b) lokální minimum v bodě $x = 3$ hodnoty -26 , lokální maximum v bodě $x = -1$ hodnoty 6 ;
- c) lokální minimum v bodě $x = -1$ hodnoty $-\frac{1}{2}$, lokální maximum v bodě $x = 1$ hodnoty $\frac{1}{2}$.

PŘÍKLAD 2:

- a) funkce je konvexní na intervalu $(-\infty, 1)$ a konkávní na intervalu $(1, \infty)$, v bodě $[1, 35]$ je inflexní bod;
- b) funkce je konvexní na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ a konkávní na intervalu $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, v bodech $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}]$ a $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{4}]$ jsou inflexní body.

PŘÍKLAD 3:

$$P(20) = 140, \quad P'(20) = 2, \quad P''(20) = -\frac{1}{2}.$$

Jde o zisk při daném počtu zákazníků. Zisk roste, ale růst zpomaluje.

PŘÍKLAD 4: $Q'(L) = 12 - \frac{1}{10}L$. Z rovnice $Q'(L) = 0$ dostaneme stacionární bod $L = 120$. Porovnáním hodnot $Q(0) = 0$, $Q(120) = 720$ a $Q(200) = 400$ zjistíme, že absolutní maximum je pro 120 pracovníků.