

# BPM\_STAE: Sbírka úloh - cvičení 8, kapitola 7

## Příklad 1

Použitím vzorců uvedených v části 5.3 kapitoly 5 pro střední hodnotu a směrodatnou odchylku diskrétní náhodné veličiny ověřte, že střední hodnota a směrodatná odchylka pro pravděpodobnostní rozdělení populace uvedené v tabulce jsou 80,60 a 8,09.

$x$	$P(x)$
70	0,2
78	0,2
80	0,4
95	0,2

## Příklad 2

Následující data udávají počet let výuky pro šest pedagogických pracovníků ekonomického oddělení na univerzitě:

13 20 8 14 20 12

- Nechť  $x$  označuje počet let výuky pro člena pedagogického týmu tohoto oddělení. Napište pravděpodobnostní rozdělení  $x$ .
- Uveďte všechny možné výběry velikosti pět (bez opakování), které lze z této populace vybrat. Spočítejte průměr pro každý z výběrů. Napište výběrové rozdělení  $x$ .
- Spočítejte průměr pro data populace. Vyberte náhodný výběr velikosti pět a spočítejte výběrový průměr  $x$ . Vypočítejte výběrovou chybu.

## Příklad 3

Průměrná měsíční platba za léky seniora ve městě je 520 dolarů se směrodatnou odchylkou 72 dolarů. Označme  $\bar{x}$  průměr takových nákladů pro náhodný výběr 25 seniorů. Najděte střední hodnotu a směrodatnou odchylku výběrového rozdělení  $\bar{x}$ .

## Příklad 4

Podle výroční zprávy Americké automobilové asociace z roku 2012 je náklad na vlastnictví a provoz čtyřkolového SUV 11 350 dolarů ročně (USA TODAY, 27. duben 2012). Tato cena zahrnuje náklady na benzín, údržbu, pojištění a financování vozidla, které najezdí 15 000 mil ročně. Předpokládejme, že rozložení těchto nákladů na vlastnictví a provoz všech čtyřkolových SUV má střední hodnotu 11 350 dolarů se směrodatnou odchylkou 2390 dolarů. Nechť  $\bar{x}$  je průměr nákladů na vlastnictví a provoz čtyřkolového SUV na základě náhodného výběru 400 těchto vozidel. Najděte střední hodnotu a směrodatnou odchylku výběrového rozdělení  $\bar{x}$ .

## Příklad 5

Uvažujte o výběrovém rozdělení  $\bar{x}$  uvedeném v tabulce 7.5.

- Spočítejte hodnotu  $\mu$  pomocí vzorce  $\mu_x = \sum x \cdot P(x)$ . Je hodnota  $\mu_x$  rovna dříve spočítané hodnotě 80,60 z cvičení 7.5?
- Spočítejte hodnotu  $\sigma_x$  pomocí vzorce  $\sigma_x = \sqrt{\sum x^2 \cdot P(x) - (\mu_x)^2}$
- Pro skóre pět,  $\sigma_x = 8,09$ . Navíc, velikost našeho vzorku je 3, takže  $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{8,09}{\sqrt{3}} = 4,67$ . Z části b byste měli dostat  $\sigma_x = 3,30$ . Proč se  $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$  neshoduje s  $\sigma_x$  v tomto případě?

- d) V našem příkladu (uvedeném na začátku části 7.1) na skóre,  $N = 5$  a  $n = 3$ . Proto  $\frac{n}{N} = \frac{3}{5} = 0,60$ . Protože  $\frac{n}{N}$  je větší než 0,05, vhodný vzorec pro výpočet  $\sigma_x$  je  $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ . Ukažte, že hodnota  $\sigma_x$  spočítaná pomocí tohoto vzorce dává stejnou hodnotu jako ta spočítaná v části b výše.

### Příklad 6

Časy doručení všech objednávek jídla ve fastfoodové restauraci mají během obědové pauzy normální rozložení se střední hodnotou 8,4 minut a směrodatnou odchylkou 1,8 minut. Označme  $\bar{x}$  průměr času doručení pro náhodný vzorek 16 objednávek v této restauraci. Spočítejte střední hodnotu a směrodatnou odchylku  $\bar{x}$  a popište tvar jeho výběrového rozdělení.

### Příklad 7

Mezi studenty, kteří mají během školního roku brigádu, je rozložení času stráveného prací týdně přibližně normální s průměrem 20,20 hodin a směrodatnou odchylkou 2,60 hodin. Označme  $\bar{x}$  průměrný čas strávený prací týdně pro 18 náhodně vybraných studentů, kteří mají během školního roku brigádu. Spočítejte střední hodnotu a směrodatnou odchylku výběrového rozdělení  $\bar{x}$  a popište tvar tohoto výběrového rozdělení.

### Příklad 8

Hmotnost lidí žijících ve městě má rozložení, které je zešíkmené doprava, se střední hodnotou 142 liber a směrodatnou odchylkou 31 liber. Označme  $\bar{x}$  průměrnou váhu náhodného vzorku 45 osob vybraných z tohoto města. Najděte střední hodnotu a směrodatnou odchylku  $\bar{x}$  a komentujte tvar jeho výběrového rozdělení.

### Příklad 9

Podle odhadu byl průměrný věk při prvním sňatku pro muže ve Spojených státech v roce 2010 28,2 let (Time, 21. března 2011). Předpokládejme, že aktuálně průměrný věk všech amerických mužů při prvním sňatku je 28,2 let s směrodatnou odchylkou 6 let a že toto rozložení je silně zešíkmené doprava. Označme  $\bar{x}$  průměrný věk při prvním sňatku pro 25 náhodně vybraných amerických mužů. Najděte střední hodnotu a směrodatnou odchylku výběrového rozdělení  $\bar{x}$ . Co když je velikost vzorku 100? Jak se tvary výběrových rozdělení liší pro obě velikosti vzorku?

### Příklad 10

Předpokládejme, že průměrná roční spotřeba žvýkaček je ve Spojených státech 200 kusů na osobu. Předpokládejme, že směrodatná odchylka spotřeby na osobu je 145 kusů ročně. Označme  $\bar{x}$  průměrnou roční spotřebu žvýkaček 84 náhodně vybraných Američanů. Najděte střední hodnotu a směrodatnou odchylku výběrového rozdělení  $\bar{x}$ . Jaký je tvar výběrového rozdělení  $\bar{x}$ ? Je nutné znát tvar rozložení populace k tomu, abychom učinili tento závěr? Vysvětlete, proč nebo proč ne.

### Příklad 11

Průměrné hodnocení GPA všech studentů zapsaných na univerzitě má přibližně normální rozložení se střední hodnotou 3,13 a směrodatnou odchylkou 0,52. Určete pravděpodobnost, že průměrné GPA náhodného vzorku 20 studentů vybraných z této univerzity je

- 3,20 nebo vyšší
- 3,00 nebo nižší
- 3,05 až 3,21

### Příklad 12

Podle článku Laroche a kolegů (The Journal of the American Board of Family Medicine 2007; 20:9-15) je průměrný denní příjem tuku u dospělých amerických občanů 91,4 gramů, se směrodatnou odchylkou 93,25 gramů. Určete pravděpodobnost, že průměrný denní příjem tuku náhodného vzorku 75 amerických dospělých je

- a. méně než 80 gramů
- b. více než 100 gramů
- c. 95 až 102 gramů

### Příklad 13

Dluhy z kreditních karet všech vysokoškolských studentů mají rozložení, které je zešikmené doprava, se střední hodnotou 2 840 dolarů a směrodatnou odchylkou 672 dolarů. Určete pravděpodobnost, že průměrný dluh z kreditních karet náhodného vzorku 36 vysokoškolských studentů bude

- a. mezi 2 600 a 2 950 dolary
- b. méně než 3 060 dolarů

### Příklad 14

Podle průzkumu PNC Financial Independence z března 2012 mají američané ve věku 20 let "průměrný dluh kolem 45 000 dolarů, což zahrnuje vše od aut až po kreditní karty, studentské půjčky a hypotéky" (USA TODAY, 24. dubna 2012). Předpokládejme, že aktuální rozložení dluhů všech dospělých ve věku 20 let v USA má střední hodnotu 45 000 dolarů a směrodatnou odchylku 12 720 dolarů. Určete pravděpodobnost, že průměrný dluh náhodného vzorku 144 američanů ve věku 20 let bude

- a. méně než 42 600 dolarů
- b. více než 46 240 dolarů
- c. 43 190 až 46 980 dolarů

### Příklad 15

Podle společnosti Moeb's Services Inc. stojí každý běžný účet v komerčních bankách ve Spojených státech mezi 175 a 200 dolary ročně (Time, 21. listopadu 2011). Předpokládejme, že průměrná roční cena všech takových běžných účtů v komerčních bankách ve Spojených státech je 190 dolarů se směrodatnou odchylkou 20 dolarů. Určete pravděpodobnost, že průměrná roční cena náhodného vzorku 100 takových běžných účtů v komerčních bankách bude

- a. méně než 179 dolarů
- b. více než 191,5 dolarů
- c. 191,70 až 194,5 dolarů

### Příklad 16

Časy doručení všech objednávek jídla ve fastfoodu během obědové hodiny mají normální rozložení se střední hodnotou 8,4 minut a směrodatnou odchylkou 1,8 minut. Určete pravděpodobnost, že průměrný čas doručení náhodného vzorku 16 objednávek v této restauraci je

- a. mezi 8 a 9 minutami
- b. v rozmezí 1 minuty od střední hodnoty populace
- c. méně než střední hodnota populace o 1 minutu nebo více

### Příklad 17

Mezi studenty, kteří mají během školního roku brigádu, je rozložení času stráveného prací týdně přibližně normální s průměrem 20,20 hodin a směrodatnou odchylkou 2,60 hodin. Určete pravděpodobnost, že průměrný čas strávený prací týdně pro 18 náhodně vybraných studentů, kteří mají během školního roku brigádu, je

- mimo rozmezí 1 hodiny od střední hodnoty populace
- 20 až 20,50 hodin
- alespoň 22 hodin
- maximálně 21 hodin

### Příklad 18

Společnost Johnson Electronics Corporation vyrábí elektronky. Je známo, že směrodatná odchylka doby života těchto elektronek je 150 hodin. Výzkumné oddělení společnosti provede výběr 100 takových elektronek a zjistí, že střední doba života těchto elektronek je 2250 hodin. Jaká je pravděpodobnost, že průměrná doba života tohoto vzorku se bude lišit maximálně o 25 hodin od průměrné doby života všech elektronek vyrobených touto společností?

### Příklad 19

Firma vyrobila v daný den pět televizí, které byly kontrolovány, zda jsou v pořádku nebo vadné. Výsledky kontroly jsou následující:

V pořádku | V pořádku | Vadné | Vadné | V pořádku

- Jaký podíl těchto televizorů je v pořádku?
- Kolik výběrů (bez opakování) o velikosti čtyři lze z této populace vybrat?
- Vypište všechny možné výběry o velikosti čtyři, které lze z této populace vybrat, a spočítejte pro ně výběrový podíl televizorů, které jsou v pořádku,  $\hat{p}$ . Určete výběrové rozdělení  $\hat{p}$ .
- Pro každý výběr uvedený v části c. spočítejte výběrovou chybu.

### Příklad 20

V roce 2009 byl na webových stránkách deníku Daily Gazette ze Schenectady ve státě New York proveden populární průzkum, ve kterém byli čtenáři tázáni: "Snížily se Vaše preference ke koupi vozu General Motors nebo Chrysler, nyní, když podaly žádost o bankrot?" 51,1 % respondentů odpovědělo "ano". Předpokládejte, že tento výsledek platí pro současnou populaci majitelů vozidel ve Spojených státech. Označme v náhodném výběru 340 majitelů jako  $\hat{p}$  podíl majitelů vozidel, kteří mají menší preference k nákupu vozidla General Motors nebo Chrysler po jejich úpadku. Najděte střední hodnotu a směrodatnou odchylku výběrového rozdělení  $\hat{p}$  a popište jeho tvar.

### Příklad 21

Podle průzkumu neví 55% Američanů, že GOP znamená Grand Old Party (Time, 17. října 2011). Předpokládejte, že tento podíl platí pro současnou populaci Američanů. Necht' v náhodném vzorku 800 osob je  $\hat{p}$  podíl těch Američanů, kteří nevědí, že GOP znamená Grand Old Party. Najděte střední hodnotu a směrodatnou odchylku výběrového rozdělení  $\hat{p}$  a popište jeho tvar.

### Příklad 22

V průzkumu Time Magazine/Aspen mezi dospělými američany provedeném strategickým výzkumným ústavem Penn Schoen Berland byla těmto dospělým položena otázka: "Co je pro USA podle vašeho názoru v příštím desetiletí důležitější?" Odpovědělo 83 % dotázaných dospělých domácí záležitosti (Time, 11. července 2011). Předpokládejte, že tento podíl platí pro současnou populaci dospělých američanů. Necht'  $\hat{p}$  je podíl náhodného vzorku 1000 dospělých američanů, kteří mají tento názor. Najděte střední hodnotu a směrodatnou odchylku výběrového rozdělení  $\hat{p}$  a popište jeho tvar.

### Příklad 23

Podle průzkumu z roku 2008 provedeného chemickou společností uvedlo 30 % dospělých ve Velké Británii, že obvykle pouští vodu po dobu 6 až 10 minut při sprchování. Necht'  $\hat{p}$  je podíl náhodného vzorku 180 dospělých. Určete pravděpodobnost, že hodnota  $\hat{p}$  bude

- a. větší než 0,35
- b. mezi 0,22 a 0,27

### Příklad 24

Od druhé poloviny roku 2011 docházelo v mnoha amerických městech k rozsáhlým protestům, které byly zejména proti korupci na Wall Street a nerovnosti mezi bohatými a chudými v Americe. Podle průzkumu časopisu Time/ABT SRBI provedeného telefonicky 9.-10. října 2011 souhlasilo 86 % dospělých, kteří byli seznámeni s těmito protesty, s tím, že Wall Street a lobbisté mají příliš velký vliv ve Washingtonu (The New York Times, 22. října 2011). Předpokládejte, že tento procentní podíl platí pro současnou populaci amerických dospělých. Necht'  $\hat{p}$  je podíl náhodného vzorku 400 amerických dospělých, kteří mají názor, že Wall Street a lobbisté mají příliš velký vliv ve Washingtonu. Určete pravděpodobnost, že hodnota  $\hat{p}$  bude

- a. větší než 0,88
- b. mezi 0,82 a 0,84

### Příklad 25

Společnost Brooklyn Corporation vyrábí DVD disky. Stroj, který se používá k výrobě těchto DVD, produkuje 4 % vadných DVD. Kontrolor jakosti každý týden vybere náhodný vzorek 150 DVD a zkoumá je, zda jsou v pořádku nebo vadné. Pokud je 8 % nebo více DVD ve vzorku vadných, proces je zastaven a stroj je přeřízen. Jaká je pravděpodobnost, že na základě vzorku 150 DVD bude proces zastaven a stroj bude přeřízen?

### Příklad 26

Na základě Amerického průzkumu času provedeného Úřadem práce dne 24. června 2015 bylo zjištěno, že každý den tráví 65 % amerických mužů ve věku 15 let a více nějaký čas domácími činnostmi, jako je úklid, vaření, péče o zahradu nebo finanční a jiný domácí management. Předpokládejte, že tento podíl platí pro současnou populaci všech amerických mužů ve věku 15 let a více. Je vybrán náhodný vzorek 600 amerických mužů ve věku 15 let a více.

- a. Určete pravděpodobnost, že výběrový podíl je i. menší než 0,68 ii. mezi 0,63 a 0,69
- b. Jaká je pravděpodobnost, že výběrový podíl se liší od populačního podílu o maximálně 0,025?
- c. Jaká je pravděpodobnost, že výběrový podíl je o více než 0,03 větší než populační podíl?

### Příklad 27

Žárovky General Electric o výkonu 100 W mají průměrnou životnost 750 hodin. Předpokládejme, že životnost všech těchto žárovek má normální rozdělení se střední hodnotou 750 hodin a směrodatnou odchylkou 55 hodin. Bud'  $\bar{x}$  průměrná životnost náhodného výběru 25 takových žárovek. Najděte střední hodnotu a směrodatnou odchylku  $\bar{x}$  a popište tvar jeho výběrového rozložení.

### Příklad 28

Balení žárovek Sylvania CFL 65 W, které využívají pouze 16 W, tvrdí, že tyto žárovky mají průměrnou životnost 8000 hodin. Předpokládejme, že životnost všech takových žárovek má normální rozdělení se střední hodnotou 8000 hodin a směrodatnou odchylkou 400 hodin. Najděte pravděpodobnost, že průměrná životnost náhodného výběru 25 takových žárovek je

- méně než 7890 hodin
- mezi 7850 a 7910 hodinami
- v rozmezí 130 hodin od střední hodnoty populace
- menší než střední hodnota populace o 150 hodin nebo více.

### Příklad 29

Podle průzkumu Time Magazine/ABT SRBI provedeného telefonicky od 9. do 10. října 2011 se 73 % dospělých vyjádřilo pro zvýšení daní při ročním příjmu v řádu milionů dolarů nebo více, aby tak pomohli snížit federální schodek (Time, 24. října 2011). Předpokládejte, že tato procentuální hodnota platí pro současnou populaci všech dospělých Američanů. Nechť je  $\hat{p}$  podíl dospělých Američanů v náhodném výběru 900, kteří budou mít výše uvedený názor. Najděte střední hodnotu a směrodatnou odchylku  $\hat{p}$  a popište tvar jeho rozložení.

### Příklad 30

Předpokládejme, že 88 % případů, kdy se ozve autoalarm na vloupání, jsou falešné. Bud'  $\hat{p}$  podíl falešných poplachů v náhodném výběru 80 případů autoalarmů, které se ozvaly. Vypočtete střední hodnotu a směrodatnou odchylku  $\hat{p}$  a popište tvar jeho rozložení.

### Příklad 31

Sedmdesát procent dospělých podporuje nějaký druh vládní kontroly cen léků. Předpokládejte, že tato procentuální hodnota platí pro současnou populaci všech dospělých. Nechť je  $\hat{p}$  podíl dospělých v náhodném výběru 400, kteří podporují vládní kontrolu cen léků. Vypočtete střední hodnotu a směrodatnou odchylku  $\hat{p}$  a popište tvar jeho rozložení.

### Příklad 32

Citlivost na lepek, postihuje přibližně 15 % obyvatel Spojených států (Zdroj: <http://www.foodintol.com/wheat.asp>). V náhodném výběru 800 osob označme  $\hat{p}$  podíl těch jednotlivců, kteří mají citlivost na lepek. Vypočtete pravděpodobnost, že hodnota  $\hat{p}$  bude

- v rozmezí 0,02 od podílu populace
- mimo rozmezí 0,02 od podílu populace
- větší než podíl populace o 0,025 nebo více
- menší než podíl populace o 0,03 nebo více.

### Příklad 33

Společnost Mong Corporation vyrábí auta. Tvrdí, že 80 % jejích autobaterií LL70 je vhodných na 70 měsíců nebo déle. Předpokládejte, že toto tvrzení je pravdivé. V náhodném výběru velikosti 100 je  $\hat{p}$  podíl takových baterií, které jsou vhodné na 70 měsíců nebo déle.

- a. Jaká je pravděpodobnost, že tento výběrový podíl bude v rozmezí 0,05 od podílu populace?
- b. Jaká je pravděpodobnost, že tento výběrový podíl bude menší než podíl populace o 0,06 nebo více?
- c. Jaká je pravděpodobnost, že tento výběrový podíl bude větší než podíl populace o 0,07 nebo více?

### Příklad 34

Nechť  $n$  představuje průměrný roční plat hráčů Major League Baseball za rok 2012. Předpokládejme, že směrodatná odchylka platů těchto hráčů je 2 845 000 dolarů. Jaká je pravděpodobnost, že průměrný plat náhodného výběru 32 baseballových hráčů za rok 2012 bude ve vzdálenosti 500 000 dolarů od průměru populace  $\mu$ ? Předpokládejme, že  $n/N < 0,05$ .