MUNI
ECON

Testování hypotéz: Dvě populace

Povinná literatura: Mann (2016), Kapitola 10

Z čeho studovat desátou lekci?

Povinná literatura:	Mann (2016), kap. 10
Příprava na cvičení:	Leaflet 11 Koncepty a procedury, cv. 11, kap. 10
Příprava na zkoušku:	Mann (2016), kap. 10 Leaflet 11 Sbírka úloh, kap. 10 Koncepty a procedury, cv. 11, kap. 10

Motivace

- **Rozhodování v ekonomii** často vyžaduje porovnání dvou skupin – například porovnání efektivity mezi různými metodami, analýza vlivu intervence na ekonomický ukazatel, nebo testování rozdílů mezi dvěma trhy.
- **Nepárový t-test** je vhodný pro porovnání *dvou nezávislých skupin*. Příklady:
  - Porovnání platů v různých odvětvích.
  - Rozdíly v útratách mezi zákazníky v různých regionech.
- **Párový t-test** nám umožňuje porovnávat *stejnou skupinu* před a po určité změně nebo zásahu. Příklady:
  - Měření dopadu vzdělávacího programu na znalosti zaměstnanců.
  - Změna spotřebního chování po ekonomické reformě.
- **Cíl přednášky:** Naučíme se, jak a kdy použít t-test k zodpovězení ekonomických otázek, jak interpretovat výsledky a jak přemýšlet o statistické významnosti v kontextu ekonomického výzkumu.

Obsah

Nezávislé versus závislé vzorky

Dva vzorky získané ze dvou populací jsou **nezávislé**, pokud výběr jednoho vzorku z jedné populace neovlivňuje výběr druhého vzorku z druhé populace. V opačném případě jsou vzorky **závislé**.

Nezávislé versus závislé vzorky

Příklad 1: Předpokládejme, že chceme odhadnout rozdíl mezi průměrnými platy všech mužských a všech ženských manažerů. K tomu získáme dva vzorky, jeden z populace mužských manažerů a druhý z populace ženských manažerů. Tyto dva vzorky jsou **nezávislé**, protože jsou získány z dvou různých populací a navzájem se neovlivňují.

Příklad 2: Předpokládejme, že chceme odhadnout rozdíl mezi průměrnými hmotnostmi všech účastníků před a po absolvování programu hubnutí. K tomu si vezmeme vzorek 40 účastníků a změříme jejich hmotnost před a po dokončení tohoto programu. Všimněte si, že tyto dva vzorky zahrnují tytéž 40 účastníků. To je příklad dvou **závislých** vzorků.

Obsah

Odhady rozdílu mezi průměry dvou populací pro nezávislé vzorky: σ_1 a σ_2 známy

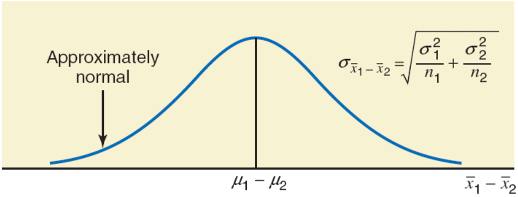
- Průměr, směrodatná odchylka a rozdělení $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$
- Intervalový odhad $\mu_1 - \mu_2$
- Testování hypotéz o $\mu_1 - \mu_2$

Průměr, směrodatná odchylka a rozdělení $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

Pokud platí tři podmínky:

1. Oba vzorky jsou nezávislé.
2. Směrodatné odchylky σ_1 a σ_2 obou populací jsou známy.
3. Splněna je alespoň jedna z následujících podmínek:
   i. Oba vzorky jsou velké (tj. $n_1 \geq 30$ a $n_2 \geq 30$).
   ii. Jsou-li oba vzorky malé, pak populace, z nichž byly vzorky získány, jsou normálně rozděleny.

Pak je vzorkovací rozdělení $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ přibližně normálně rozděleno.



Průměr, směrodatná odchylka a rozdělení $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$

Když jsou splněny podmínky uvedené na předchozím snímku, rozdělení $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ je přibližně normální s
průměrem

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \mu_1 - \mu_2$$

a
směrodatnou odchylkou

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Interval spolehlivosti pro $\mu_1 - \mu_2$

S využitím normálního rozdělení je $(1-\alpha)100\%$ **interval spolehlivosti** pro $\mu_1 - \mu_2$ vyjádřen jako:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$$

Hodnota z je získána z tabulky normálního rozdělení pro danou úroveň spolehlivosti. Hodnota $\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ je vypočítána, jak bylo vysvětleno dříve.

Poznámka: Zde $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ je bodový odhad $\mu_1 - \mu_2$.

Příklad 3

Zadání: Podle průzkumu činil průměrný příspěvek zaměstnavatele na zdravotní pojištění 16 834 dolarů v roce 2014 a 15 745 dolarů v roce 2012. Předpokládejme, že tyto průměry byly založeny na náhodných vzorcích 250 a 200 zaměstnanců, kteří měli takové zdravotní pojištění v letech 2014 a 2012 domluvené. Dále předpokládejme, že směrodatné odchylky populace pro roky 2014 a 2012 byly 2160 dolarů a 1990 dolarů.

Nechť μ_1 a μ_2 jsou příslušné populační průměry ročních příspěvků pro roky 2014 a 2012.

(a) Jaký je bodový odhad $\mu_1 - \mu_2$?

(b) Sestrojte 97% interval spolehlivosti pro $\mu_1 - \mu_2$.

Příklad 3: Řešení

(a) Bodový odhad $\mu_1 - \mu_2$ je hodnota

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = \$16\,834 - \$15\,745 = \$1\,089$$

(b) 97% interval spolehlivosti => kritická hodnota z je 2.17.

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(2160)^2}{250} + \frac{(1990)^2}{200}} = 196.1196$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = (\$16\,834 - \$15\,745) \pm 2.17 \cdot (196.1196) = 1089 \pm 425.58 = \$663.42 \text{ až } \$1514.58$$

Takže s 97% jistotou můžeme říci, že rozdíl mezi průměrnými ročními příspěvky na zdravotní pojištění v letech 2014 a 2012 je mezi \$663.42 a \$1514.58.

Testování hypotéz o $\mu_1 - \mu_2$

1. Testování alternativní hypotézy, že průměry dvou populací jsou rozdílné, je ekvivalentní k $\mu_1 \neq \mu_2$, což je totéž jako $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$.
2. Testování alternativní hypotézy, že průměr první populace je větší než průměr druhé populace, je ekvivalentní $\mu_1 > \mu_2$, což je to samé jako $\mu_1 - \mu_2 > 0$.
3. Testování alternativní hypotézy, že průměr první populace je menší než průměr druhé populace, je ekvivalentní $\mu_1 < \mu_2$, což je to samé jako $\mu_1 - \mu_2 < 0$.

Testování hypotéz o $\mu_1 - \mu_2$

Při použití normálního rozdělení se hodnota **testovací statistiky z** pro $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ vypočítá jako:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Hodnota $\mu_1 - \mu_2$ je nahrazena z H_0.

Poznámka: Hodnota $\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ je vypočítána tak, jak bylo vysvětleno dříve v této přednášce.

Příklad 4

Zadání: Vraťme se k Příkladu 3 o průměrných ročních příspěvcích na zdravotní pojištění v letech 2014 a 2012. Testujte na hladině významnosti 1 %, zda se populační průměry pro oba roky liší.

Příklad 4: Řešení

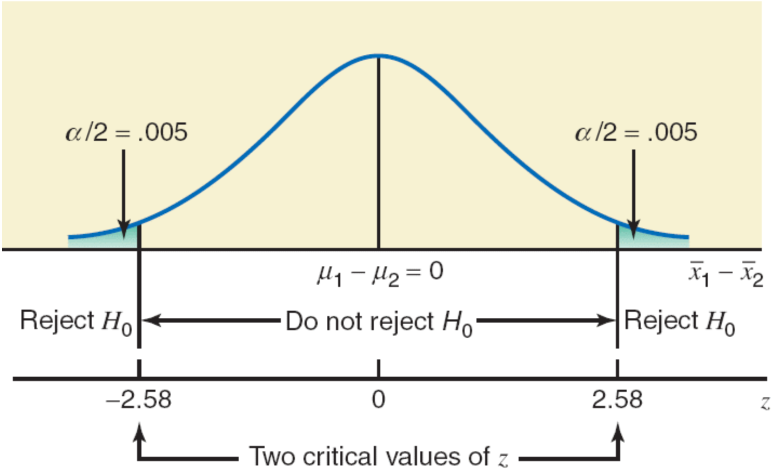
Krok 1: Stanovíme hypotézy

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \text{(Populační průměry nejsou rozdílné.)}$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad \text{(Populační průměry jsou rozdílné.)}$$

Krok 2: Směrodatné odchylky populace, σ_1 a σ_2, jsou známé. Oba vzorky jsou velké; $n_1 > 30$ a $n_2 > 30$. Proto používáme normální rozdělení k provedení testu hypotézy.

Krok 3: $\alpha = 0.01$. Znak $\neq$ v alternativní hypotéze naznačuje, že test je oboustranný. Oblast v každém konci $\rightarrow \alpha/2 = 0.01/2 = 0.005$ Kritické hodnoty z jsou 2.58 a -2.58.

Příklad 4: Řešení



Příklad 4: Řešení

Krok 4:

$$\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(2160)^2}{250} + \frac{(1990)^2}{200}} = 196.1196064$$

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}} = \frac{(\$16834 - \$15745) - 0}{196.1196064} = 5.55$$

Krok 5: Protože hodnota testovací statistiky $z = 5.55$ spadá do oblasti zamítnutí, zamítáme nulovou hypotézu H_0. Tudíž konstatujeme, že průměrné roční příspěvky na zdravotní pojištění sponzorované zaměstnavatelem pro rodinné krytí byly v letech 2014 a 2012 rozdílné.

Obsah

Odhady rozdílu mezi průměry dvou populací pro nezávislé vzorky: σ_1 a σ_2 neznámé, ale $\sigma_1 = \sigma_2$

- Intervalový odhad $\mu_1 - \mu_2$
- Testování hypotéz o $\mu_1 - \mu_2$

Vážená směrodatná odchylka pro dva vzorky

Vážená směrodatná odchylka pro dva vzorky se vypočítá jako:

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

kde n_1 a n_2 jsou velikosti vzorků a s_1^2 a s_2^2 jsou rozptyly těchto vzorků. Zde s_p je estimátor pro σ.

Estimátor směrodatné odchylky pro $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ je:

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Interval spolehlivosti $\mu_1 - \mu_2$

$(1 - \alpha)100\%$ **interval spolehlivosti pro $\mu_1 - \mu_2$** je:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$$

kde hodnota t je získána z tabulky rozdělení t pro danou úroveň spolehlivosti a $n_1 + n_2 - 2$ stupňů volnosti a $s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ je vypočítána, jak bylo vysvětleno dříve.

Příklad 5

Zadání: Agentura spotřebitelské ochrany chtěla odhadnout rozdíl v průměrných množstvích kofeinu u dvou značek kávy. Agentura vzala vzorek 15 jednolitrových sklenic kávy značky I, který ukázal, že průměrné množství kofeinu v těchto sklenicích je 80 miligramů na sklenici se směrodatnou odchylkou 5 miligramů. Další vzorek 12 jednolitrových sklenic kávy značky II poskytl průměrné množství kofeinu rovné 77 miligramů na sklenici se směrodatnou odchylkou 6 miligramů.

Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl mezi průměrným množstvím kofeinu v jednolitrových sklenicích těchto dvou značek kávy. Předpokládejte, že obě populace mají normální rozdělení a že směrodatné odchylky obou populací jsou stejné.

Příklad 5: Řešení

$$Ssp = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{\frac{(15-1)5^2 + (12-1)6^2}{15+12-2}}$$
$$= 5.4626$$

$$s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} = 5.4626\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{12}} = 2.1155$$

$$\begin{aligned}
\text{Plocha v každém ocasu} &= \alpha/2 = 0.5 - (0.95/2) = 0.025 \\
\text{Stupně volnosti} &= n_1 + n_2 - 2 = 25 \\
t &= 2.060 \\
(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t s_{\bar{x}_1-\bar{x}_2} &= (80-77) \pm 2.060(2.11565593) \\
&= 3 \pm 4.36 = -1.36 \text{ až } 7.36 \text{ miligramů}
\end{aligned}$$

Testování hypotézy o $\mu_1 - \mu_2$

Hodnota **testovací statistiky** t pro $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ je vypočítána jako:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Hodnota $\mu_1 - \mu_2$ v tomto vzorci je nahrazena z nulové hypotézy a $s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ je vypočítán, jak bylo vysvětleno dříve.

Příklad 6

Zadání: Vzorek 14 plechovek dietní sody Brand I dává průměrný počet kalorií 23 na plechovku se směrodatnou odchylkou 3 kalorie. Další vzorek 16 plechovek dietní sody Brand II dává průměrný počet kalorií 25 na plechovku se směrodatnou odchylkou 4 kalorie.

Můžeme při zvolené hladině významnosti 1 % vyvodit, že se průměrný počet kalorií na plechovku pro tyto dvě značky dietní sodovky liší? Předpokládejme, že kalorický obsah dietní sodovky na plechovku je normálně rozložený pro obě značky a že směrodatné odchylky pro obě populace jsou stejné.

Příklad 6: Řešení

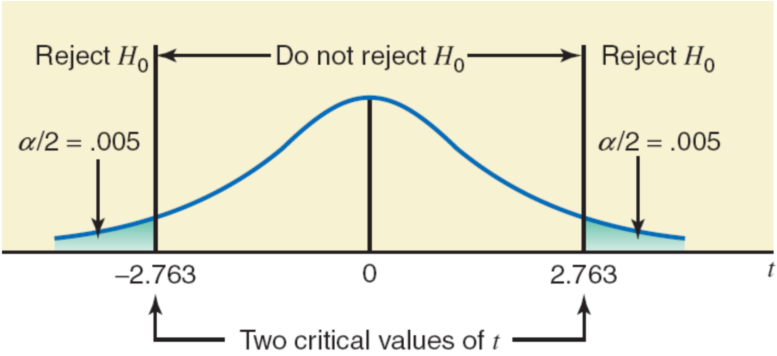
Krok 1: Stanovíme hypotézy

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \quad \text{(Průměrný počet kalorií není rozdílný.)}$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \quad \text{(Průměrný počet kalorií je rozdílný.)}$$

Krok 2: Oba vzorky jsou nezávislé. Směrodatné odchylky σ_1 a σ_2 jsou neznámé, ale rovné. Velikosti vzorků jsou malé, ale obě populace jsou normálně rozděleny. **Použijeme t-rozdělení.**

Krok 3: $\alpha = 0.01$. Znak $\neq$ v alternativní hypotéze naznačuje, že test je oboustranný. Oblast v každém konci $\rightarrow \alpha/2 = 0.01/2 = 0.005$. Stupně volnosti $df = n1 + n2 - 2 = 14 + 16 - 2 = 28$. Kritické hodnoty t jsou 2.763 a -2.763.

Příklad 6: Řešení



Příklad 6: Řešení

Krok 4:

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = 3.5707,$$

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 3.5707\sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{16}} = 1.3067,$$

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{(23 - 25) - 0}{1.3067} = -1.531.$$

Krok 5: Hodnota testovací statistiky $t = 1.531$ se nachází v oblasti nezamítnutí. Proto nezamítáme nulovou hypotézu. Důsledkem je, že docházíme k závěru, že neexistuje rozdíl v průměrném počtu kalorií na plechovku mezi oběma značkami dietních sodovek.

Příklad 7

Zadání: Vzorek 40 dětí z Prahy ukázal, že průměrný čas, který tráví sledováním instagramu, je 28.50 hodin týdně se směrodatnou odchylkou 4 hodiny. Další vzorek 35 dětí z Brna ukázal, že průměrný čas, který tráví sledováním instagramu, je 23.25 hodin týdně se směrodatnou odchylkou 5 hodin.

Můžete usoudit, s využitím hladiny významnosti 2.5 %, že průměrný čas, který děti tráví sledováním instagramu v Praze, je větší než ten pro děti v Brně? Předpokládejme, že směrodatné odchylky pro obě populace jsou stejné.

Příklad 7: Řešení

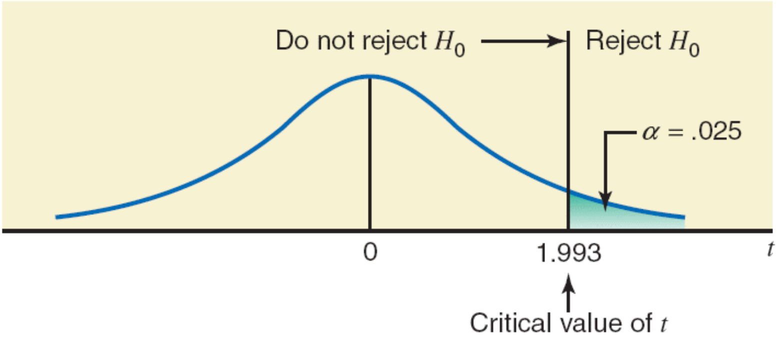
Krok 1: Stanovíme hypotézy

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 > 0$$

Krok 2: Oba vzorky jsou nezávislé. Směrodatné odchylky σ_1 a σ_2 jsou neznámé, ale rovné. Velikosti vzorků jsou velké. **Použijeme t-rozdělení.**

Krok 3: $\alpha = 0.025$. Znak $>$ v alternativní hypotéze naznačuje, že test je pravostranný. Oblast v pravém konci $\rightarrow \alpha = 0.025$. Stupně volnosti $df = n_1 + n_2 - 2 = 40 + 35 - 2 = 73$. Kritická hodnota t je 1.993.

Příklad 7: Řešení



Příklad 7: Řešení

Krok 4:

$$s_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = 4.4935,$$

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 4.4935 \sqrt{\frac{1}{40} + \frac{1}{35}} = 1.0400,$$

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{(28.50 - 23.25) - 0}{1.0400} = 5.048.$$

Krok 5: Hodnota testovací statistiky $t = 5.048$ se nachází v oblasti zamítnutí. Proto zamítáme nulovou hypotézu. Důsledkem je, že docházíme k závěru, že děti v Praze stráví na Instagramu více času než děti v Brně.

Obsah

Odhady rozdílu mezi průměry dvou populací pro nezávislé vzorky: σ_1 a σ_2 neznámé a $\sigma_1 \neq \sigma_2$

- Intervalový odhad $\mu_1 - \mu_2$
- Testování hypotéz o $\mu_1 - \mu_2$

Odhady rozdílu mezi průměry dvou populací pro nezávislé vzorky: σ_1 a σ_2 neznámé a $\sigma_1 \neq \sigma_2$

Stupně volnosti

Pokud:

1. jsou oba vzorky nezávislé.
2. σ_1 a σ_2 obou populací jsou neznámé a rozdílné.
3. a je splněna alespoň jedna z následujících podmínek
   i. Oba vzorky jsou velké (tj. $n_1 \geq 30$ a $n_2 \geq 30$)
   ii. Pokud jsou jedna nebo obě velikosti vzorků malé, pak jsou obě populace, z nichž byly vzorky odebrány, normálně rozdělené.

pak se k vyvození závěrů o $\mu_1 - \mu_2$ používá t-rozdělení a stupně volnosti pro t-rozdělení jsou dány vzorcem:

$$df = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

Číslo df určené tímto vzorcem je vždy zaokrouhleno dolů.

Intervalový odhad $\mu_1 - \mu_2$

$(1-\alpha)100\%$ **interval spolehlivosti pro $\mu_1 - \mu_2$** je dán:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$$

kde hodnota t je získána z tabulky t-rozdělení pro danou úroveň spolehlivosti a stupně volnosti jsou dány dle dříve zmíněného vzorce a $s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ odpovídá vzorci

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Testování hypotéz o $\mu_1 - \mu_2$

Hodnota **testové statistiky t pro $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$** je vypočítána jako:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

Hodnota $\mu_1 - \mu_2$ v tomto vzorci je nahrazena z nulové hypotézy a $s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$ je vypočítána jak bylo vysvětleno dříve.

Obsah

Testování rozdílů dvou závislých vzorků (párových pozorování)

- Intervalový odhad μ_d
- Testování hypotéz o μ_d

Závislé vzorky

Dva vzorky se označují jako závislé, když pro každou hodnotu dat získanou z jednoho vzorku existuje odpovídající hodnota dat získaná ze druhého vzorku, přičemž obě tyto hodnoty dat jsou získány ze stejného zdroje.

Průměr a směrodatná odchylka rozdílu dvou závislých výběrů

Hodnoty průměru a směrodatné odchylky, $\bar{d}$ a s_d, rozdílu dvou závislých výběrů jsou vypočítány následovně:

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n},$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d^2 - \frac{\left(\sum d\right)^2}{n}}{n-1}}.$$

Rozdělení, průměr a směrodatná odchylka $\bar{d}$

Pokud je známa σ_d a buď je velikost vzorku velká ($n \geq 30$) nebo je populace normálně rozdělená, pak je **rozdělení $\bar{d}$** přibližně normální s **průměrem** a **směrodatnou odchylkou:**

$$\mu_{\bar{d}} = \mu_d,$$
$$\sigma_{\bar{d}} = \frac{\sigma_d}{\sqrt{n}}.$$

Rozdělení $\bar{d}$

Odhad směrodatné odchylky párových rozdílů

Pokud:

1. je směrodatná odchylka σ_d populace rozdílů neznámá.
2. je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:
   - Velikost vzorku je velká (tj. $n \geq 30$)
   - Velikost vzorku je malá, ale populace rozdílů je normálně rozdělená.

Pak se používá t-rozdělení k vyvození závěrů o μ_d.

Směrodatná odchylka $\sigma_{\bar{d}}$ odhadu $\bar{d}$ je odhadována pomocí $s_{\bar{d}}$, což je vypočítáno jako:

$$s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}}$$

Interval spolehlivosti μ_d

$(1-\alpha)100\%$ **interval spolehlivosti pro μ_d** vypočítáme jako:

$$\bar{d} \pm t s_{\bar{d}}$$

kde hodnota t je získána z tabulky t-rozdělení pro danou hladinu významnosti a $n-1$ stupňů volnosti, a $s_{\bar{d}}$ je vypočítána jak bylo vysvětleno dříve.

Příklad 8

Zadání: Výzkumník chtěl zjistit účinek speciální diety na systolický krevní tlak. Vybral si vzorek sedmi dospělých a na dobu 3 měsíců je umístil na tento dietní plán. Následující tabulka uvádí systolický krevní tlak (v mm Hg) sedmi dospělých před a po dokončení tohoto plánu.

Before	210	180	195	220	231	199	224
After	193	186	186	223	220	183	233

Nechť μ_d je průměrné snížení systolického krevního tlaku díky tomuto speciálnímu dietnímu plánu pro populaci všech dospělých. Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro μ_d. Předpokládejte, že populace rozdílů je (přibližně) normálně rozdělená.

Příklad 8: Řešení

Before	After	Difference d	d^2
210	193	17	289
180	186	−6	36
195	186	9	81
220	223	−3	9
231	220	11	121
199	183	16	256
224	233	−9	81
		$\Sigma d = 35$	$\Sigma d^2 = 873$

Příklad 8: Řešení

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{35}{7} = 5.00,$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{873 - \frac{(35)^2}{7}}{7-1}} = 10.7857.$$

$$s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{10.7857}{\sqrt{7}} = 4.0766,$$

$$\text{Oblast v každém ocasu} = \alpha/2 = 0.5 - (0.95/2) = 0.025,$$

$$\text{stupně volnosti} = df = n - 1 = 7 - 1 = 6,$$

$$t = 2.447,$$

$$\bar{d} \pm t s_{\bar{d}} = 5.00 \pm 2.447(4.0766) = 5.00 \pm 9.98$$

$$= -4.98 \text{ do } 14.98.$$

Testování hypotéz o μ_d

Hodnota **testové statistiky t pro $\bar{d}$** je vypočítána následovně:

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_d}{s_{\bar{d}}}$$

Příklad 9

Zadání: Společnost chtěla zjistit, zda účast na kurzu „jak být úspěšným obchodníkem“ může zvýšit průměrný obrat jejích zaměstnanců. Společnost poslala šest svých obchodníků na tento kurz. Následující tabulka uvádí týdenní obraty těchto obchodníků před a po účasti na kurzu.

Before	12	18	25	9	14	16
After	18	24	24	14	19	20

S využitím hladiny významnosti 1 %, zjistěte, zda vzrostl průměrný týdenní obrat všech obchodníků v důsledku účasti na tomto kurzu. Předpokládejte, že populace rozdílů má normální rozdělení.

Příklad 9: Řešení

Before	After	Difference d	d^2
12	18	-6	36
18	24	-6	36
25	24	1	1
9	14	-5	25
14	19	-5	25
16	20	-4	16
		$\Sigma d = -25$	$\Sigma d^2 = 139$

Příklad 9: Řešení

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{-25}{6} = -4.17,$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{139 - \frac{(-25)^2}{6}}{6-1}} = 2.6394,$$

$$s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{2.6394}{\sqrt{6}} = 1.0775.$$

Příklad 9: Řešení

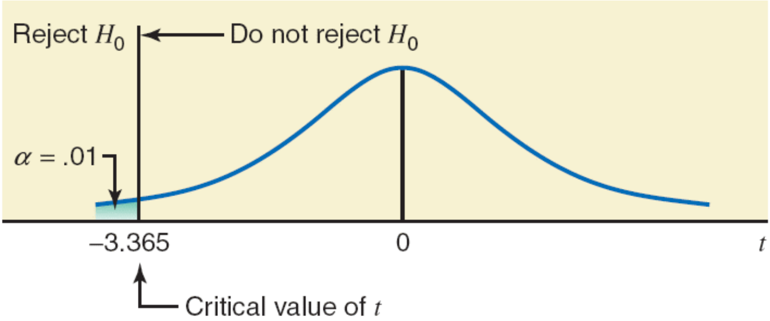
Krok 1: Stanovíme hypotézy

$$H_0 : \mu_d = 0 \quad (\mu_1 - \mu_2 = 0 \text{ průměrné týdenní tržby se nezměnily})$$
$$H_1 : \mu_d < 0 \quad (\mu_1 - \mu_2 < 0 \text{ průměrné týdenní tržby se zvýšily})$$

Krok 2: Oba vzorky jsou závislé. Směrodatná odchylka σ je neznámá. Populace rozdílů je normálně rozdělena. **Použijeme t-rozdělení.**

Krok 3: $\alpha = 0.01$. Znak $<$ v alternativní hypotéze naznačuje, že test je levostranný. Oblast v levém konci $\rightarrow \alpha = 0.01$. Stupně volnosti $df = n - 1 = 6 - 1 = 5$. Kritická hodnota t je -3.365.

Příklad 9: Řešení



Příklad 9: Řešení

Krok 4: $t = \frac{\bar{d}-\mu_d}{S_{\bar{d}}} = \frac{-4.17-0}{1.0775} = -3.870$

Krok 5: Hodnota testovací statistiky $t = 3.870$ se nachází v oblasti zamítnutí. Proto zamítáme nulovou hypotézu. Důsledkem je, že docházíme k závěru, že absolvování kurzu zvyšuje průměrné týdenní tržby.

Příklad 10

Zadání: Výzkumník chtěl zjistit účinek speciální diety na systolický krevní tlak. Vybral si vzorek sedmi dospělých a na dobu 3 měsíců je umístil na tento dietní plán. Následující tabulka uvádí systolický krevní tlak (v mm Hg) sedmi dospělých před a po dokončení tohoto plánu.

Before	210	180	195	220	231	199	224
After	193	186	186	223	220	183	233

Nechť μ_d je průměr rozdílů mezi systolickým krevním tlakem před a po dokončení tohoto speciálního dietního plánu pro populaci všech dospělých. Pokud použijeme hladinu významnosti 5%, můžeme usuzovat, že průměrná hodnota rozdílů μ_d se liší od nuly? Předpokládejme, že populace rozdílů je (přibližně) normálně rozdělená.

Příklad 10: Řešení

Before	After	Difference d	d^2
210	193	17	289
180	186	−6	36
195	186	9	81
220	223	−3	9
231	220	11	121
199	183	16	256
224	233	−9	81
		$\Sigma d = 35$	$\Sigma d^2 = 873$

Příklad 10: Řešení

$$\bar{d} = \frac{\sum d}{n} = \frac{35}{7} = 5.00,$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum d^2 - \frac{(\sum d)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{873 - \frac{(35)^2}{7}}{6}} = 10.7857,$$

$$s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{10.7857}{\sqrt{7}} = 4.0766.$$

Příklad 10: Řešení

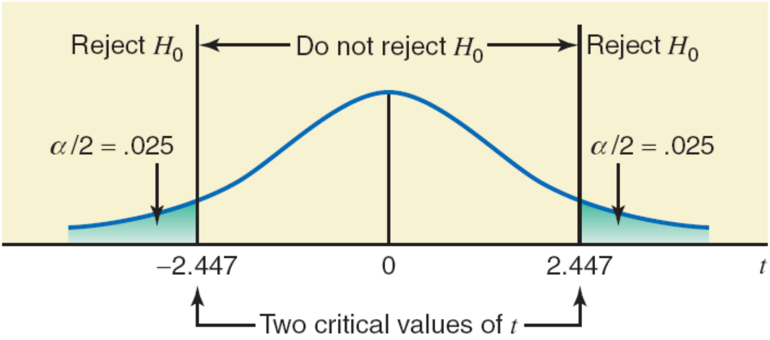
Krok 1: Stanovíme hypotézy

$$H_0 : \mu_d = 0 \quad \text{(průměrný rozdíl není různý od nuly)}$$
$$H_1 : \mu_d \neq 0 \quad \text{(průměrný rozdíl je různý od nuly)}$$

Krok 2: Oba vzorky jsou závislé. Směrodatná odchylka σ je neznámá. Velikost vzorku je malá, nicméně populace rozdílů je normálně rozdělena. **Použijeme t-rozdělení.**

Krok 3: $\alpha = 0.05$. Znak $\neq$ v alternativní hypotéze naznačuje, že test je oboustranný. Oblast v každém konci $\rightarrow \alpha/2 = 0.025$. Stupně volnosti $df = n - 1 = 7 - 1 = 6$. Kritická hodnota t je -2.447 a 2.447.

Příklad 10: Řešení



Příklad 10: Řešení

Krok 4: $t = \frac{\bar{d}-\mu_d}{S_{\bar{d}}} = \frac{5.00-0}{4.0766} = 1.226$

Krok 5: Hodnota testovací statistiky $t = 1.226$ se nachází v oblasti nezamítnutí. Proto nezamítáme nulovou hypotézu. Důsledkem je, že docházíme k závěru, že populační průměrný rozdíl není různý od nuly a že speciální dieta nemá na systolický krevní tlak účinek.

Obsah

Nezávislé versus závislé vzorky

Odhady rozdílu, dvě NZV populace, σ_1 a σ_2 známé

Odhady rozdílu, dvě NZV populace, $\sigma_1 = \sigma_2$ neznámé

Odhady rozdílu, dvě NZV populace, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ neznámé

Testování rozdílů dvou závislých vzorků

Odhady podílu, dvě NZV populace

Závěry o rozdílu mezi dvěma populačními podíly pro velké a nezávislé vzorky

- Průměr, směrodatná odchylka a rozdělení $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$
- Intervalový odhad $p_1 - p_2$
- Testování hypotéz o $p_1 - p_2$

Průměr, směrodatná odchylka a rozdělení $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$

Pro dva velké a nezávislé vzorky je **rozdělení $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$** (přibližně) normální s **průměrem**

$$\mu_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = p_1 - p_2$$

a **směrodatnou odchylkou**

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$$

kde $q_1 = 1 - p_1$ a $q_2 = 1 - p_2$.

Intervalový odhad $p_1 - p_2$

$(1-\alpha)100\%$ **interval spolehlivosti pro $p_1 - p_2$** je:

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$$

kde hodnota z je získána z tabulky normálního rozdělení pro danou hladinu významnosti a $s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$ je vypočítána jako:

$$s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}$$

kde $q_1 = 1 - p_1$ a $q_2 = 1 - p_2$.

Příklad 11

Zadání: Výzkumník chtěl odhadnout rozdíl mezi procenty uživatelů dvou zubních past, kteří nikdy nepřejdou na jinou zubní pastu. Ve vzorku 500 uživatelů zubní pasty A, který výzkumník provedl, 100 uživatelů uvedlo, že nikdy nepřejdou na jinou zubní pastu. Ve druhém vzorku 400 uživatelů zubní pasty B, který provedl tentýž výzkumník, 68 uživatelů uvedlo, že nikdy nepřejdou na jinou zubní pastu.

(a) Nechť p_1 a p_2 jsou podíly všech uživatelů zubních past A a B, kteří nikdy nepřejdou na jinou zubní pastu. Jaký je bodový odhad rozdílu $p_1 - p_2$?

(b) Sestrojte 97% interval spolehlivosti pro rozdíl mezi podíly všech uživatelů obou zubních past, kteří nikdy nepřejdou na jinou zubní pastu.

Příklad 11: Řešení

Oba podíly jsou vypočítány následovně:

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{100}{500} = 0.20 \quad \rightarrow \quad \hat{q}_1 = 1 - 0.20 = 0.80$$
$$\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{68}{400} = 0.17 \quad \rightarrow \quad \hat{q}_2 = 1 - 0.17 = 0.83$$

Ověření předpokladů:

$$n_1\hat{p}_1 = 500(0.20) = 100 \qquad n_1\hat{q}_1 = 500(0.80) = 400$$
$$n_2\hat{p}_2 = 400(0.17) = 68 \qquad n_2\hat{q}_2 = 400(0.83) = 332$$

Každá z těchto hodnot je větší než 5. Velikosti obou vzorků jsou velké. V důsledku toho používáme normální rozdělení k vytvoření intervalu spolehlivosti pro $p_1 - p_2$.

Příklad 11: Řešení

(a) **Bodový odhad:**

$$p_1 - p_2 = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 = 0.20 - 0.17 = 0.03$$

(b) **Intervalový odhad**

Směrodatná odchylka $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ je:

$$s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}} = 0.0259$$

S využitím $z = 2.17$,

$$(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm z s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = (.20 - .17) \pm 2.17(0.0259)$$

$$= 0.03 \pm 0.056 = -0.026 \text{ až } 0.086$$

Testování hypotéz o $p_1 - p_2$

Hodnota **testové statistiky** z pro $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ je vypočítána jako:

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}$$

Hodnota $p_1 - p_2$ je nahrazena z H_0, která je obvykle nula.

Výraz $s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$ lze spočítat jako:

$$s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\bar{p}\bar{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)},$$

kde $\bar{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$ a $\bar{q} = 1 - \bar{p}$.

Příklad 12

Zadání: Výzkumník chtěl odhadnout rozdíl mezi procenty uživatelů dvou zubních past, kteří nikdy nepřejdou na jinou zubní pastu.

Ve vzorku 500 uživatelů zubní pasty A, který výzkumník provedl, 100 uživatelů uvedlo, že nikdy nepřejdou na jinou zubní pastu. Ve druhém vzorku 400 uživatelů zubní pasty B, který provedl tentýž výzkumník, 68 uživatelů uvedlo, že nikdy nepřejdou na jinou zubní pastu.

Na hladině významnosti 1 %, ověřte, že podíl uživatelů zubní pasty A, kteří nikdy nepřejdou na jinou zubní pastu, je vyšší než podíl uživatelů zubní pasty B, kteří nikdy nepřejdou na jinou zubní pastu.

Příklad 12: Řešení

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{100}{500} = 0.20 \qquad \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{68}{400} = 0.17$$

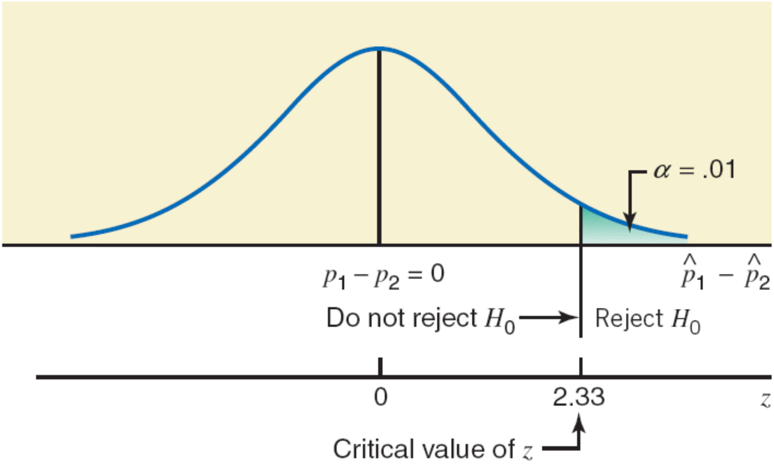
Krok 1: Stanovíme hypotézy

$$H_0 : p1 - p2 = 0 \quad (p_1 \text{ není větší než } p_2)$$
$$H_1 : p1 - p2 > 0 \quad (p_1 \text{ je větší než } p_2)$$

Krok 2: Hodnoty $n_1\hat{p}_1$, $n_1\hat{q}_1$, $n_2\hat{p}_2$, a $n_2\hat{q}_2$ jsou všechny větší než 5. Velikost vzorku je velká. **Použijeme normální rozdělení.**

Krok 3: $\alpha = 0.01$. Znak $>$ v alternativní hypotéze naznačuje, že test je pravostranný. Oblast v pravém konci $\rightarrow \alpha = 0.01$. Kritická hodnota z je 2.33.

Příklad 12: Řešení



Příklad 12: Řešení

Krok 4:

$$\bar{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{100 + 68}{500 + 400} = 0.187,$$

$$\bar{q} = 1 - \bar{p} = 1 - 0.187 = 0.813,$$

$$s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\bar{p}\bar{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = 0.0261,$$

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}} = \frac{(0.20 - 0.17) - 0}{0.0261} = 1.15.$$

Krok 5: Hodnota testovací statistiky $z = 1.15$ se nachází v oblasti nezamítnutí. Proto nezamítáme nulovou hypotézu a dospíváme k závěru, že podíl uživatelů zubní pasty A, kteří nikdy nepřejdou na jinou zubní pastu, není vyšší než podíl uživatelů zubní pasty B, kteří nikdy nepřejdou na jinou zubní pastu.

Shrnutí přednášky:

Nezávislé versus závislé vzorky

Odhady rozdílu, dvě NZV populace, σ_1 a σ_2 známé

Odhady rozdílu, dvě NZV populace, $\sigma_1 = \sigma_2$ neznámé

Odhady rozdílu, dvě NZV populace, $\sigma_1 \neq \sigma_2$ neznámé

Testování rozdílů dvou závislých vzorků

Odhady podílu, dvě NZV populace

Co si nastudovat na příští týden?

Příprava na cvičení: Leaflet 11
Koncepty a procedury, cv. 11, kap. 10

Povinná literatura: Mann (2016), Kapitola 11

Děkuji za pozornost!