BÁZE A DIMENZE

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

Abstrakt přednášky

Abstrakt

V této kapitole sa seznámíme s pojmem ***báze*** vektorového prostoru. To nám umožní ve vektorových prostorech zavést ***souřadnice***. Dále budeme definovat ***dimenzi*** vektorového prostoru a odvodíme si některé jeho základní vlastnosti.

V následující kapitole si potom mimo jiné dokážeme, že dimenze je základní strukturní invariant tzv. ***konečně rozměrných*** vektorových prostorů.

Obsah přednášky

Obsah

Steinitzova věta I

5 Báze a dimenze

5.1 Steinitzova věta a konečně rozměrné prostory

Věta 5.1.1 Steinitzova věta *Nechť* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. *Jsou-li vektory* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ *lineárně nezávislé a všechny patří do lineárního obalu* $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$, *pak* $n \leq m$.

Steinitzova věta II

Tvrzení 5.1.2 *Pro libovolný vektorový prostor V jsou nasledující podmínky ekvivalentní:*

(i) *existuje konečná množina $X \subseteq V$ tak, že $[X] = V$;*

(ii) *každá lineárně nezávislá množina $Y \subseteq V$ je konečná.*

Steinitzova věta III

Říkáme, že vektorový prostor V je ***konečně rozměrný*** (***konečně dimenzionální***), pokud splňuje některou (tedy nutně obě) z ekvivalentních podmínek (i), (ii) právě dokázaného tvrzení.

V opačném případě říkáme, že V je ***nekonečně rozměrný*** (***nekonečně dimenzionální***) vektorový prostor.

Báze a dimenze I

5.2 Báze a dimenze konečně rozměrného prostoru

Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. ***Bází*** prostoru V nazýváme každou lineárně nezávislou uspořádanou n-tici $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ vektorů z V, která generuje celý prostor V.

Říkáme pak, že vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ ***tvoří bázi*** prostoru V.

Báze a dimenze II

Následující tvrzení je důsledkem věty 4.4.4.

Tvrzení 5.2.1 *Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom*

(a) *libovolnou lineárně nezávislou uspořádanou k-tici $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z V můžeme doplnit do nějaké báze $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \dots, \mathbf{u}_n)$ prostoru V;*

(b) *z libovolné generující uspořádané m-tice $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ vektorů z V můžeme vybrat nějakou bázi $(\mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_n})$ prostoru V.*

Báze a dimenze III

Věta 5.2.2 *Nechť V je konečně rozměrný vektorový prostor. Potom*

(a) *V má alespoň jednu bázi;*

(b) *libovolné dvě báze prostoru V mají stejný počet prvků.*

Právě dokázaná věta nám umožňuje korektně definovat ***dimenzi*** nebo též ***rozměr*** konečně rozměrného vektorového prostoru V jako počet prvků jeho libovolné báze. Dimenzi vektorového prostoru V značíme $\dim V$.

Báze a dimenze IV

Pokud $\dim V = n$, říkáme, že V je ***n-rozměrný*** vektorový prostor. Pokud V je nekonečně rozměrný prostor, klademe $\dim V = \infty$.
V případě, že bude potřebné zdůraznit úlohu číselného tělesa K, budeme používat podrobnější označení $\dim_K V$.

Tedy V je konečně rozměrný právě tehdy, když $\dim V < \infty$.

Báze a dimenze V

Tvrzení 5.2.3 *Nechť* $\dim V = n$, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$. *Potom libovolné dvě z následujících podmínek implikují třetí:*

(i) *vektory* $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ *jsou lineárně nezávislé;*

(ii) $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m] = V$;

(iii) $m = n$.

To kromě jiného znamená, že na ověření, zda n vektorů $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ tvoří bázi n-rozměrného vektorového prostoru V, stačí ověřit jen jednu (a to libovolnou) z podmínek (i), (ii).

Souřadnice vektoru I

5.3 Souřadnice vektoru vzhledem na danou bázi

Následující věta je speciálním případem věty 4.4.2.

Věta 5.3.1 *Vektory* $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ *tvoří bázi vektorového prostoru* V *právě tehdy, když každý vektor* $\mathbf{x} \in V$ *můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru lineární kombinace* $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$.

Souřadnice vektoru II

Existence aspoň jednoho vyjádření $\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n$ je ekvivalentní s podmínkou, že vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ generují V. Jednoznačnost tohoto vyjádření je zase ekvivalentní s lineární nezávislostí vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Tedy $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ je bází V tehdy a jen tehdy, když pro každé $\mathbf{x} \in V$ existuje právě jedno $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)^T \in K^n$ tak, že

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_n\mathbf{u}_n = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c}.$$

Souřadnice vektoru III

Uvědomme si, že

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Souřadnice vektoru IV

Tento jednoznačně určený sloupcový vektor $\mathbf{c} \in K^n$ budeme nazývat ***souřadnice vektoru*** $\mathbf{x}$ ***vzhledem na bázi*** α a označovat

$$\mathbf{c} = (\mathbf{x})_\alpha.$$

Tedy každá báze α v n-rozměrném vektorovém prostoru V definuje ***souřadnicové zobrazení*** $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\alpha$ z V do sloupcového vektorového prostoru K^n.

Souřadnice vektoru V

Tvrzení 5.3.2 *Nechť* $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ *je báze konečně rozměrného vektorového prostoru* V*. Potom příslušné souřadnicové zobrazení* $(-)_{\boldsymbol{\alpha}} : V \to K^n$ *je bijektivní a zachovává lineární kombinace, t. j. pro libovolná* $a, b \in K$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ *platí*

$$(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})_{\boldsymbol{\alpha}} = a(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}} + b(y)_{\boldsymbol{\alpha}}.$$

K němu inverzní zobrazení $(-)_{\boldsymbol{\alpha}}^{-1} : K^n \to V$ *je dané předpisem* $\mathbf{c} \mapsto \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c}$.

Souřadnice vektoru VI

Zejména tedy pro libovolné $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{c})_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{c}.$$

První rovnost ukazuje, jak je možno vektor $\mathbf{x}$ zrekonstruovat z dané báze $\boldsymbol{\alpha}$ a jeho souřadnic $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\alpha}}$ v této bázi; druhá, že souřadnice lineární kombinace $\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{u}_i$ v báze $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ tvoří právě vektor $(c_1, \ldots, c_n)^T$.

Souřadnice vektoru VII

Takto zavedené souřadnice můžeme nazvat ***sloupcovými souřadnicemi*** vzhledem k dané bázi.

Podobným způsobem můžeme zavést i ***řádkové souřadnice*** a dokázat pro ně analogická tvrzení jako pro sloupcové.

Souřadnice vektoru VIII

Příklad 5.3.3 Označme $\mathbf{e}_i^{(n)} = \mathbf{s}_i(\mathbf{I}_n) \in K^n$ sloupcový vektor skládající ze samých nul, mimo i-té složky, která je 1.

Potom $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = (\mathbf{e}_1^{(n)}, \ldots, \mathbf{e}_n^{(n)})$ je báze sloupcového vektorového prostoru K^n.

Nazýváme ji ***kanonickou bází*** tohoto prostoru. Můžeme ji ztotožnit s jednotkovou maticí $\mathbf{I}_n$.

Souřadnice vektoru IX

Občas budeme horní index (n) vynechávat a příslušnou bázi označovat stručně $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$.
Pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n,$$

proto $(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{x}$, t. j. každý vektor $\mathbf{x} \in K^n$ splýva se svými vlastními souřadnicemi v kanonické bázi.

Souřadnice vektoru X

Kanonická báze řádkového vektorového prostoru K^n je tvořená řádky jednotkové matice $\mathbf{I}_n$ a značíme ji stejně jako v předcházejícím případě $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = (\mathbf{e}_1^{(n)}, \ldots, \mathbf{e}_n^{(n)})^T$ nebo stručně $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)^T$, s tím rozdílem, že $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} = \boldsymbol{\varepsilon}$ je sloupec vektorů a každé $\mathbf{e}_i$ je řádek skládající se ze samých nul, mimo i-té pozice, na které je 1.

Věta 5.3.4 *Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ platí $\dim K^n = n$.*

Souřadnice vektoru XI

Příklad 5.3.5 Sloupce matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi α sloupcového vektorového prostoru K^4.

Souřadnice vektoru XII

Souřadnice vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in K^n$ v bázi $\boldsymbol{\alpha}$ jsou dané vztahem

$$(x)_{\boldsymbol{\alpha}} = (x_4, x_3 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_2)^T.$$

Platí totiž

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x_3 - x_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_2 - x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Souřadnice vektoru XIII

Příklad 5.3.6 Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Pro libovolné $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$ označme $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)} = \mathbf{E}_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{jl})_{m\times n}$ matici typu $m \times n$ nad tělesem K, která sestává ze samých nul, kromě pozice (k, l), na které je 1.

Zřejmě každou matici $\mathbf{A} = (a_{kl}) \in K^{m\times n}$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\mathbf{E}_{kl}.$$

Souřadnice vektoru XIV

Z toho vyplývá, že matice $\mathbf{E}_{kl}^{(m,n)}$, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$, tvoří bázi vektorového prostoru $K^{m \times n}$ všech matic typu $m \times n$ nad tělesem K.

Speciálním případem je kanonická báze $\boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$ v prostoru K^n.

Dostáváme tak vztah:

$$\dim K^{m \times n} = mn.$$

Dimenze součtu a součinu I

5.4 Dimenze součtu a součinu vektorových prostorů

Věta 5.4.1 *Nechť $S, T \subseteq V$ jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V. Potom*

$$\dim(S+T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T).$$

Dimenze součtu a součinu II

Důsledek 5.4.2 *Nechť S, T jsou konečně rozměrné lineární podprostory vektorového prostoru V. Potom $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, t. j. součet $S + T$ je direktní právě tehdy, když*

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T.$$

Dimenze součtu a součinu III

Tvrzení 5.4.3 *Nechť V, W jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad číselným tělesem K. Potom pro dimenzi jejich přímého součinu platí*

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$