3. Základní číselné obory.

Pojem čísla je základním matematickým pojmem, s nímž se setkáváme již od předškolního věku. Na základní a střední škole se čísla a operace s nimi zavádějí víceméně intuitivně a žáci postupně poznávají jejich důležité vlastnosti. V této kapitole zavedeme označení, resp. popis základních číselných oborů a podrobněji se zmíníme pouze o vlastnostech komplexních čísel.

Čísla přirozená
označujeme symbolem $\mathbb{N}$, přičemž $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ \dots \}$. Poznamenejme, že někdy se mezi přirozená čísla zahrnuje i číslo nula. Jde o věc dohody, my v tomto textu nulu do přirozených čísel zahrnovat nebudeme.

Čísla celá
označujeme symbolem $\mathbb{Z}$, přičemž $\mathbb{Z} = \{\dots \ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ \dots \}$. Základními vlastnostmi celých čísel se budeme podrobněji zabývat v následující kapitole.

Čísla racionální
označujeme symbolem $\mathbb{Q}$. Jedná se o čísla, která lze vyjádřit ve tvaru zlomku, kde čitatel i jmenovatel jsou celá čísla, přičemž jmenovatel je různý od nuly. Připomeňme, že každé racionální číslo má nekonečně mnoho možných vyjádření uvedeného tvaru, např.

$$\frac{2}{3}\,, \quad \frac{-2}{-3}\,, \quad \frac{4}{6}\,, \quad \frac{-4}{-6}\,, \quad \frac{6}{9}\,, \quad \frac{-6}{-9}\,, \quad \dots \quad \text{atd.}$$

Použijeme-li pro racionální číslo zápis, kde se ve jmenovateli vyskytuje nejmenší kladné číslo, pak říkáme, že jsme dané číslo vyjádřili v **základním tvaru**. Takové vyjádření je pro každé racionální číslo zřejmě jediné. V předchozím příkladu je to zápis $\frac{2}{3}$.

Čísla reálná
označujeme symbolem $\mathbb{R}$. Množina $\mathbb{R}$ reálných čísel se skládá ze dvou disjunktních podmnožin, z nichž jedna je tvořena čísly racionálními a druhá čísly iracionálními. Přitom iracionální čísla nelze vyjádřit jako podíl celých čísel, jsou to například čísla

$$\sqrt{2}\,, \quad \sqrt{5}\,, \quad \pi\,, \quad \log 6\,, \quad \sin \tfrac{1}{3}\pi\,, \quad \text{atd.}$$

Množina $\mathbb{R}$ má jednu důležitou vlastnost: existuje vzájemně jednoznačné přiřazení všech reálných čísel a všech bodů libovolné přímky. Jinak řečeno, každému reálnému číslu lze přiřadit jediný bod zvolené přímky a také obráceně, každému bodu této přímky odpovídá jediné reálné číslo. Podrobným studiem vlastností reálných čísel se zabývá základní kurz matematické analýzy.

Jak již bylo řečeno, uvedené číselné obory jsme popsali pouze intuitivně. K jejich přesné konstrukcí a přesnému odvozením základních vlastností je potřeba matematických znalostí, které přesahují rámec středoškolské matematiky. Touto problematikou se bude později zabývat kurz teoretické aritmetiky. Nicméně, všechny základní vlastnosti čísel uváděné na střední škole samozřejmě platí a my je budeme i nadále používat.

Víme tedy, že ve všech uvedených číselných oborech je možno čísla sčítat a násobit, přičemž jak sčítání tak násobení jsou komutativní, asociativní a platí distributivní zákon. Navíc v $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ ke každému číslu existuje číslo opačné, zatímco v oboru přirozených čísel $\mathbb{N}$ tomu tak není. Dále, v oborech $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ ke každému nenulovému číslu existuje číslo převrácené, zatímco v $\mathbb{N}$ a v $\mathbb{Z}$ tomu tak není. Konečně, čísla všech uvedených číselných množin je možno uspořádat "podle velikosti" (tzn. zavést symboly pro nerovnosti $\leq$, $<$, atd.). Pro počítání s nerovnostmi pak platí celá řada známých početních pravidel.

Čísla komplexní

označujeme symbolem $\mathbb{C}$. Na rozdíl od předchozích číselných oborů nejsou komplexní čísla mírou žádné reálné veličiny a nelze je tedy získat jako výsledek fyzikálních či jiných měření. Komplexní čísla vznikla postupným zobecňováním pojmu čísla v souvislosti s potřebou řešit úlohy, jejichž řešení v předchozích číselných oborech neexistuje. Příkladem takové úlohy je třeba hledání řešení jednoduché kvadratické rovnice

$$x^2 + 1 = 0 .$$

V žádném z předchozích číselných oborů řešení této rovnice evidentně neexistuje, protože tam pro každé číslo x platí, že $x^2 \geq 0$, což znamená, že je vždy $x^2 + 1 \neq 0$. V oboru komplexních čísel však existuje řešení nejenom této kvadratické rovnice, ale dá se ukázat, že existuje řešení jakékoliv kvadratické rovnice a dokonce, že existuje řešení všech podobných rovnic libovolných stupňů.

Definice.

Komplexní čísla $\mathbb{C}$ zavádíme jako množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel, tzn. $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sčítání a násobení komplexních čísel definujeme takto: pro libovolné $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ položíme

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c \, , \, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd \, , \, ad + bc) . \end{aligned}$$

Úmluva.

Všimněme si, že pro komplexní čísla tvaru $(t, 0)$ platí:

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c \, , \, 0) \qquad \text{a} \qquad (a, 0) \cdot (c, 0) = (ac \, , \, 0) ,$$

což znamená, že komplexní čísla tohoto tvaru se sčítají a násobí stejným způsobem jako čísla reálná. Můžeme tedy každé komplexní číslo tvaru $(t, 0)$ ztotožnit s reálným číslem t. Označíme-li navíc komplexní číslo $(0, 1)$ symbolem i, je pak možné každé komplexní číslo $z = (a, b)$ zapsat ve tvaru:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, b) \cdot (0, 1) = a + bi$$

Definice.

Vyjádření komplexního čísla $z = (a, b)$ ve tvaru $z = a + bi$ se nazývá **algebraický tvar komplexního čísla** z. Přitom reálné číslo a se nazývá **reálná část** komplexního čísla z, reálné číslo b se nazývá **imaginární část** komplexního čísla z a číslo $i = (0, 1)$ se nazývá **imaginární jednotka**.

Z předchozích definic bezprostředně vyplývá několik důležitých poznatků:

1. pro imaginární jednotku i platí:

$$i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1\,.$$

   Vidíme tedy, že výše zmiňovaná kvadratická rovnice tvaru $x^2 + 1 = 0$ má v oboru komplexních čísel řešení a tímto řešením je například komplexní číslo i. Pro úplnost jenom poznamenejme, že tato rovnice má celkem dvě řešení, tím druhým je komplexní číslo $-i = (0,-1)$.

2. dvě komplexní čísla v algebraickém tvaru se rovnají právě když se rovnají jejich reálné části a jejich imaginární části.

3. sčítání a násobení dvou komplexních čísel v algebraickém tvaru se provádí stejným způsobem, jako sčítání a násobení dvojčlenů (s využitím toho, že $i^2 = -1$). Nemusíme si tedy nazpaměť pamatovat definice pro sčítání a násobení komplexních čísel uvedené v předchozí definici.

4. komplexní čísla je možno graficky znázorňovat, a sice jako body v tzv. Gaussově rovině. Jedná se o rovinu s kartézským souřadnicovým systémem s osami x ("reálná osa") a y ("imaginární osa"), v níž je každé komplexní číslo $z = (a,b) = a + bi$ znázorněno jako bod o souřadnicích $[a,b]$. Přitom zde platí podobný vztah jako platil mezi reálnými čísly a body na přímce. V tomto případě je tedy každému komplexnímu číslu uvedeným způsobem přiřazen právě jeden bod Gaussovy roviny a naopak, každému bodu Gausssovy roviny odpovídá jediné komplexní číslo.

Jednoduchými technickými výpočty se lehce ověří, že sčítání a násobení komplexních čísel splňuje stejná základní pravidla, které platí pro racionální čísla a reálná čísla. Konkrétně - sčítání a násobení komplexních čísel je komutativní, asociativní a platí distributivní zákon. Roli nuly hraje komplexní číslo $(0,0)$, které ztotožňujeme s reálným číslem 0 a roli jedničky hraje komplexní číslo $(1,0)$, které zotožňujeme s reálným číslem 1. Dále, ke komplexnímu číslu $z = (a,b) = a+bi$ existuje číslo opačné, kterým je komplexní číslo $-z = (-a,-b) = -a-bi$ a konečně platí, že k nenulovému komplexnímu číslu z existuje číslo převrácené $\frac{1}{z}$. Můžeme tedy provádět dělení čísla $a+bi$ nenulovým číslem $c+di$. Přitom se používá standardní "trik", kdy čitatele i jmenovatele rozšíříme číslem $c - di$, jak je vidět z následujícího příkladu.

Příklad 3.1.
Napište v algebraickém tvaru komplexní číslo $\dfrac{4+i}{2-3i}$.

Řešení:

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{4+i}{2-3i} \cdot \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{8+12i+2i+3i^2}{2^2-(3i)^2} = \frac{5+14i}{13} = \frac{5}{13} + \frac{14}{13}\,i\,.$$

Poznámka.
Na rozdíl od od čísel reálných nelze komplexní čísla uspořádat "podle velikosti". Pro komplexní čísla nelze zavést vztah nerovnosti tak, aby splňoval všechny základní vlastnosti a početní pravidla, které má v případě čísel reálných. Komplexní čísla tedy

například nelze rozlišit na "kladná" a "záporná" (tj. větší nebo menší než nula) a do množiny komplexních čísel nelze přenést žádné partie z oboru čísel reálných, v nichž se vyskytují pojmy "větší" nebo "menší" (tzn. například partii o nerovnicích).

Je-li dáno komplexní číslo $z = a + bi$, pak komplexní číslo $a - bi$ se nazývá **číslo komplexně sdružené** k číslu z a označuje se symbolem $\overline{z}$. Přitom platí, že součin komplexních čísel z a $\overline{z}$ je číslo reálné, které je dokonce nezáporné. Skutečně:

$$z \cdot \overline{z} \;=\; (a + bi) \cdot (a - bi) \;=\; a^2 + b^2 \;\geq\; 0\,.$$

Podobným způsobem se rozepsáním dokáže, že pro libovolná komplexní čísla u, v platí:

$$\overline{u + v} \;=\; \overline{u} + \overline{v} \qquad\qquad \overline{u \cdot v} \;=\; \overline{u} \cdot \overline{v} \qquad\qquad \overline{\left(\frac{u}{v}\right)} \;=\; \frac{\overline{u}}{\overline{v}}\,.$$

Pro ilustraci dokažme například druhý z uvedených vztahů, ostatní se dokáží podobně. Je-li tedy $u = a + bi$, $v = c + di$, potom je

$$\overline{u \cdot v} \;=\; \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} \;=\; \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} \;=\; (ac - bd) - (ad + bc)i$$

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = (a - bi) \cdot (c - di) = (ac - bd) + (-ad - bc)i = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

což znamená, že dokazovaný vztah platí.

Další pojem, který známe z předchozích číselných oborů a který lze zavést pro komplexní čísla je pojem absolutní hodnoty. Je-li tedy $z = (a, b) = a + bi$ libovolné komplexní číslo, pak **absolutní hodnota komplexního čísla** z se označuje $|\,z\,|$ a definuje se takto:

$$|\,z\,| \;=\; \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Z této definice ihned vidíme, že geometrický význam absolutní hodnoty z komplexního čísla je stejný, jako je tomu u reálných čísel. V obou případech totiž absolutní hodnota udává vzdálenost obrazu daného čísla od počátku soustavy souřadnic. Pro počítání s absolutními hodnotami z komplexních čísel platí podobná základní pravidla jako u čísel reálných, tzn. pro libovolná komplexní čísla u, v je:

$$|\,u \cdot v\,| \;=\; |\,u\,| \cdot |\,v\,| \qquad\qquad \text{a je-li } v \neq 0\text{, pak} \quad \left|\,\frac{u}{v}\,\right| \;=\; \frac{|\,u\,|}{|\,v\,|}\,.$$

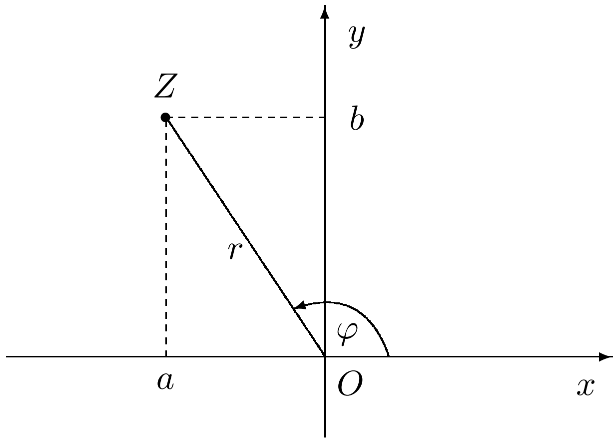
Oba vztahy můžeme dokázat bezprostředním rozepsáním podle definice absolutní hodnoty. Je-li tedy $u = a + bi$, $v = c + di$, potom je $u \cdot v = (ac - bd) + (ad + bc)i$, odkud dostáváme

$$|\,u \cdot v\,| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}$$

$$|\,u\,| \cdot |\,v\,| = \sqrt{(a^2 + b^2)} \cdot \sqrt{(c^2 + d^2)} = \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}$$

odkud plyne první z obou vztahů. Druhý vztah se dokáže analogicky.

Komplexní čísla jsme doposud zapisovali pouze v algebraickém tvaru. Nyní si ukážeme jiný způsob jejich zápisu. Jeho princip spočívá v tom, že bod $Z \neq O$ v Gaussově rovině můžeme jednoznačně určit pomocí jeho vzdálenosti r od počátku souřadné soustavy O a velikosti orientovaného úhlu φ jehož počáteční rameno je kladná poloosa x a koncové rameno je polopřímka OZ (viz obrázek). Je zřejmé, že v případě $Z = O$, tzn. pro komplexní číslo $z = 0$, uvedené vyjádření není možné.



Reálné číslo φ určující velikost daného orientovaného úhlu se nazývá **argument komplexního čísla** z a označuje se symbolem $\arg z$.

Ze známých vlastností orientovaného úhlu plyne, že má-li komplexní číslo $z \neq 0$ argument φ, pak má též argument $\varphi + k \cdot 2\pi$, kde k je libovolné celé číslo. Jinými slovy řečeno, argument nenulového komplexního čísla není určen jednoznačně, nýbrž je určen "až na celočíselný násobek 2π".

Z předchozího obrázku je dále vidět, že platí:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad , \qquad \sin\varphi = \frac{b}{r} \qquad , \qquad \cos\varphi = \frac{a}{r} \; .$$

Znamená to, že pro číslo r nemusíme zavádět zvláštní pojmenování, protože je rovno absolutní hodnotě daného komplexního čísla, tzn. $r = |\,z\,|$. Pro komplexní číslo $z \neq 0$ tedy dostáváme:

$$z \;=\; a + bi \;=\; r\cos\varphi + (r\sin\varphi)\, i \;=\; |\,z\,|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \; .$$

Definice.
Zápis nenulového komplexního čísla ve tvaru $z = |\,z\,|\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ se nazývá **goniometrický tvar komplexního čísla** z.

Uvědomme si, že dvě komplexní čísla vyjádřená v goniometrickém tvaru se rovnají právě když se rovnají jejich absolutní hodnoty a jejich argumenty se liší o $k{\cdot}2\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ (popřípadě se argumenty mohou přímo rovnat, je-li $k = 0$).

Jednou z výhod zápisu komplexních čísel v goniometrickém tvaru je to, že se lehce spočítá jejich součin a podíl. Přímým rozepsáním, s využitím součtových vzorců pro sinus a kosinus, se dá ukázat, že pro daná nenulová komplexní čísla z_1, z_2, kde

$$z_1 = |\,z_1\,|\,(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \qquad , \qquad z_2 = |\,z_2\,|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

platí

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; |\, z_1 \,|\cdot|\, z_2 \,|\, (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \;+\; i\, \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} \;=\; \frac{|\, z_1 \,|}{|\, z_2 \,|}\, (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \;+\; i\, \sin(\varphi_1 - \varphi_2))\;.$$

Předchozí vztah pro součin dvou komplexních čísel v goniometrickém tvaru je možné zobecnit na součin libovolného konečného počtu komplexních čísel (důkaz se vede matematickou indukcí). Podobně se postupuje v případě, když umocňujeme komplexní číslo v goniometrickém tvaru na přirozený exponent.

Věta 3.1.
Nechť $z = |\, z \,|\, (\cos\varphi + i \sin\varphi) \in \mathbb{C}$. *Pak pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *platí:*

$$z^n = |\, z \,|^n \;(\cos n\varphi \;+\; i\, \sin n\varphi\,)\,.$$

Důkaz.
Tvrzení dokážeme matematickou indukcí vzhledem k n.

α) pro $n = 1$ tvrzení evidentně platí

β) předpokládáme, že tvrzení platí pro $1, \;\ldots\;, n{-}1$ $(n \geq 2)$. Dokážeme nyní dané tvrzení pro n. Použijeme-li postupně definici mocniny, indukční předpoklad a součtové vzorce pro kosinus a sinus, dostáváme:

$$z^n = z \cdot z^{n-1} = |\, z \,|\; (\cos\varphi + i \sin\varphi) \cdot |\, z \,|^{n-1}\; (\cos(n{-}1)\varphi + i \sin(n{-}1)\varphi) =$$

$$= |z|^n \left[\cos\varphi\cos(n{-}1)\varphi - \sin\varphi\sin(n{-}1)\varphi + i(\cos\varphi\sin(n{-}1)\varphi + \sin\varphi\cos(n{-}1)\varphi)\right] =$$

$$= |\, z \,|^n \;(\cos n\varphi \;+\; i\, \sin n\varphi\,)\;\;.$$ ■

Dosadíme-li do předchozí věty $|\, z \,| = 1$, dostaneme tvrzení, které odvodil francouzský matematik Abraham de Moivre (1667 - 1754) již počátkem 18. století.

Důsledek (Moivreova věta).
Pro každé přirozené číslo n *a libovolné reálné číslo* φ *platí:*

$$(\cos\varphi \;+\; i\, \sin\varphi\,)^{\,n} \;=\; (\cos n\varphi \;+\; i\, \sin n\varphi\,)\,.$$

Na závěr této kapitoly se ještě budeme zabývat řešením speciálního typu rovnic v oboru komplexních čísel, a to tak zvaných binomických rovnic. Přitom **binomická rovnice** je rovnice tvaru

$$x^{\,n} \;-\; a \;=\; 0$$

kde a je dané komplexní číslo, x je neznámá a $n > 1$ je přirozené číslo. Řešit takovou rovnici znamená najít všechna komplexní čísla, která jí vyhovují. Tato komplexní čísla budeme také nazývat (komplexní) $n-$**té odmocniny z komplexního čísla** a.

Při řešení binomických rovnic budeme vždy předpokládat, že $a \neq 0$, protože pro $a = 0$, má tato rovnice zřejmě jediné řešení, a to $x = 0$. Tento předpoklad nám také umožní vyjádřit číslo a v goniometrickém tvaru. Řešení binomických rovnic jsou popsána v následujícím tvrzení.

Věta 3.2.
Binomická rovnice

$$x^n - a = 0,$$

kde $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *, má v oboru komplexních čísel právě* n *různých řešení, a to*

$$x_k = \sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), \qquad \textit{pro } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Důkaz.
K tomu, abychom tuto větu dokázali, je třeba ukázat tři věci, a to, že:

1. číslo x_k dané rovnici vyhovuje – to však ihned dostaneme dosazením čísla x_k do dané rovnice a umocněním podle věty 3.1.
2. čísla $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ jsou navzájem různá – to bezprostředně vyplývá z vyjádření komplexního čísla v goniometrickém tvaru a z vlastností funkcí kosinus a sinus.
3. žádná další řešení dané binomické rovnice neexistují.
   Je-li tedy $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ řešením dané rovnice, potom po dosazení z za x do dané rovnice a úpravě dostaneme:

   $$|z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

   Z rovnosti dvou čísel v goniometrickém tvaru však plyne, že

   $$|z|^n = |a| \qquad \wedge \qquad n\varphi = \alpha + t\cdot 2\pi, \text{ kde } t \in \mathbb{Z},$$

   odkud ihned vyplývá, že z je rovno některému z čísel $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. ■

Pokud bychom si všechna řešení binomické rovnice $x^n - a = 0$ chtěli nakreslit v Gaussově rovině, pak zjistíme, že čísla $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ leží ve vrcholech pravidelného n-úhelníku vepsaného do kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$.

Příklad 3.2.
Nalezněte všechny páté odmocniny z komplexního čísla $a = \dfrac{2i\cdot(\sqrt{3}-i)^{10}}{(1+i\sqrt{3})^8\cdot(-1+i)^6}$.

Řešení.
Hledané řešení označíme z. Spočítáme zvlášť jeho absolutní hodnotu a jeho argument (s využitím početních pravidel, která jsme uvedli dříve). Tedy:

$$|z| = \sqrt[5]{\frac{|2i|\cdot|\sqrt{3}-i|^{10}}{|1+i\sqrt{3}|^8\cdot|-1+i|^6}} = \sqrt[5]{\frac{2\cdot 2^{10}}{2^8\cdot(\sqrt{2})^6}} = 1$$

$$\arg z \;=\; \tfrac{1}{5}\Big(\arg(2i) + 10\arg(\sqrt{3}{-}i) \;-\; [\,8\arg(1{+}i\sqrt{3}) + 6\arg(-1{+}i)\,] \;+\; k{\cdot}2\pi\Big) \;=$$
$$=\; \tfrac{1}{5}\Big(\tfrac{\pi}{2} \,+\, 10\cdot\tfrac{11}{6}\pi \,-\, 8\cdot\tfrac{\pi}{3} \,-\, 6\cdot\tfrac{3}{4}\pi \,+\, k\cdot 2\pi\Big) \;=\; \tfrac{7}{3}\pi \,+\, k\cdot\tfrac{2}{5}\pi\,.$$

Hledanými pátými odmocninami z a je pak následujících pět komplexních čísel (místo argumentu $\frac{7}{3}\pi$ můžeme vzít hodnotu $\frac{7}{3}\pi - 2\pi = \frac{\pi}{3}$ z intervalu $\langle 0, 2\pi)$) :

$$z_k \;=\; \cos(\,\tfrac{\pi}{3} + k\cdot\tfrac{2}{5}\pi\,) \,+\, i\,\sin(\,\tfrac{\pi}{3} + k\cdot\tfrac{2}{5}\pi\,) \qquad \text{pro } k = 0,1,2,3,4\,.$$

Velmi důležitým zvláštním případem binomické rovnice je rovnice

$$x^n \,-\, 1 \;=\; 0\,.$$

Řešení této rovnice budeme nazývat **n-té odmocniny z jedné**. Vzhledem k tomu, že číslo 1 (chápané jako komplexní číslo) má argument $\alpha = 0$ a jeho absolutní hodnota je rovna jedné, dostáváme dosazením do vzorce pro řešení binomické rovnice, že pro n-té odmocniny z jedné platí :

$$x_k \;=\; \cos\frac{2k\pi}{n} \,+\, i\,\sin\frac{2k\pi}{n}\,, \qquad\qquad k = 0,1,2,\;\ldots\;,n{-}1\,.$$

Vidíme tedy, že n-tých odmocnin z jedné (v oboru komplexních čísel) je právě n a jejich obrazy, nakreslené v Gaussově rovině, leží ve vrcholech pravidelného n-úhelníku vepsaného do jednotkové kružnice se středem v počátku, přičemž jeden z vrcholů leží v bodě 1 na reálné ose. Nakreslete si sami obrázek znázorňující například všech osm osmých odmocnin z jedné.

Na závěr našich úvah o binomických rovnicích uveďme dvě důležité vlastnosti n-tých odmocnin z jedné, které budeme později využívat.

Věta 3.3.
Pro n – té odmocniny z jedné platí :

1. *součin dvou n-tých odmocnin z jedné je opět n-tá odmocnina z jedné*
2. *převrácená hodnota n-té odmocniny z jedné je opět n-tá odmocnina z jedné.*

Důkaz.
Nechť x_r, x_s jsou libovolné n-té odmocniny z jedné. Potom je : $x_r^n = 1$ a $x_s^n = 1$.

Nyní vezměme číslo $x_r{\cdot}x_s$ a číslo $\dfrac{1}{x_r}$ a umocněme je na n – tou. Dostaneme :

$$(x_r{\cdot}x_s)^n \;=\; x_r^n\cdot x_s^n \;=\; 1 \qquad\qquad \text{a} \qquad\qquad \left(\frac{1}{x_r}\right)^n \;=\; \frac{1^n}{x_r^n} \;=\; 1\,,$$

odkud plyne, že čísla $x_r{\cdot}x_s$ a $\dfrac{1}{x_r}$ jsou řešeními binomické rovnice $x^n \,-\, 1 \;=\; 0$. Jinak řečeno, obě čísla jsou n-tými odmocninami z jedné. ■