1. OPAKOVÁNÍ, POČÍTÁNÍ S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

Komplexní čísla jsou čísla tvaru $z = a + ib$, kde $a \in \mathbf{R}$ se nazývá reálná část komplexního čísla z, $b \in \mathbf{R}$ se nazývá imaginární část komplexního čísla z a pro i (tzv. imaginární jednotku) platí $i^2 = -1$. Tento tvar komplexního čísla se nazývá algebraický tvar komplexního čísla z.

Pro komplexní čísla $u = a+ib, v = c+id$ definujeme operace sčítání, odčítání a násobení takto:

$$u \pm v = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

$$u \cdot v = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Číslo $\overline{z} = a - ib$ se nazývá komplexně sdružené k číslu $z = a + ib$, číslo $-z = -a - ib$ je opačné komplexní číslo k číslu $z = a + ib$.

Reálné číslo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se nazývá absolutní hodnota komplexního čísla $z = a + ib$. Platí $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. Komplexní číslo, pro které platí $|z| = 1$, se nazývá komplexní jednotka.

Číslo z^{-1} s vlastností $z \cdot z^{-1} = 1$ se nazývá převrácené číslo komplexního čísla z. Platí $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Podíl komplexních čísel $u = a + ib$ a $v = c + id \neq 0$ je definován jako součin $u \cdot v^{-1}$.

Komplexní čísla znázorňujeme v kartézské soustavě souřadnic xy (tzv. rovina komplexních čísel nebo také Gaussova rovina).

Komplexní číslo $z = a + ib, z \neq 0$ můžeme rovněž zapsat v goniometrickém tvaru $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, kde $r \in \langle 0, 2\pi)$ je rovno $|z|$, $\cos\alpha = \frac{a}{|z|}, \sin\alpha = \frac{b}{|z|}$. Číslo $\alpha \in \mathbf{R}$ se nazývá argument komplexního čísla z.

Sčítání komplexních čísel odpovídá sčítání vektorů v rovině.

Násobení komplexního čísla z reálným skalárem k odpovídá stejnolehlosti v rovině s koeficientem k se středem v počátku; $F(z) = kz$.

Násobení komplexního čísla z komplexní jednotkou $(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ odpovídá otočení v rovině o úhel α okolo počátku; $F(z) = z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Násobení komplexního čísla z pevným komplexním číslem $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ odpovídá složení stejnolehlosti a otočení; $F(z) = zr(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Číslo $z \in \mathbf{C}$ se nazývá n-tá odmocnina čísla $a + ib \in \mathbf{C}$ právě tehdy, když je kořenem rovnice $z^n = a + ib$.

K řešení rovnice $z^n = a + ib$ použijeme goniometrický tvar komplexního čísla. Píšeme

$$z^n = a + ib = R(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

kde R, α jsou známé. Číslo z hledáme ve tvaru

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Z rovnosti

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = R(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

vyplývá $r^n = R$, tedy $r = \sqrt[n]{R}$ a $n\varphi = \alpha + 2k\pi$, tedy $\varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k}{n}\pi, k = 0, 1, ..., n-1$.
Existuje n řešení rovnice.

Příklad: Řešte rovnici $z^3 = 8i$.

Řešení: Komplexní číslo $8i$ převedeme na goniometrický tvar:
$|8i| = 8, \cos\alpha = 0, \sin\alpha = 1, \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 8i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.
Tedy

$$z^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi) = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$$

z čehož dostáváme

$$\begin{aligned} r^3 = 8 &\quad\Rightarrow\quad r = 2 \\ 3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi &\quad\Rightarrow\quad \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi \end{aligned}$$

Nyní za k dosadíme čísla $0, 1, 2$, určíme jednotlivé úhly a vypočteme všechna řešení rovnice:
$k = 0: \ \varphi_0 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ \Rightarrow z_1 = 2(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = \sqrt{3} + i$
$k = 1: \ \varphi_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{6}\pi = 150^\circ \Rightarrow z_1 = 2(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + i$
$k = 2: \ \varphi_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi = \frac{9}{6}\pi = 270^\circ \Rightarrow z_2 = 2(\cos 270^\circ + i\sin 270^\circ = -2i$

Cvičení:

1. Jsou dána komplexní čísla $a = -6 + 2i, b = 3 + 5i$. Vyjádřete v algebraickém tvaru čísla
   (a) $(a-b)^3$
   (b) $\overline{ab}$
   (c) $\frac{a}{b}$

2. Upravte a vyjádřete v algebraickém tvaru čísla:

   (a) $(3i - 7)(8 + i)$

   (b) $-i + 2i(3 - 4i)$

   (c) $\frac{3-2i}{1-i}$

   (d) $\frac{1+i}{3-4i}$

   (e) $\frac{(1+2i)(2+i)(3-2i)}{(1-i)^2}$

   (f) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

3. Určete všechna reálná čísla x, y, pro která platí

   (a) $(1+i)x + (13+7i)y = 0$,

   (b) $4(2+i)x + (1-4i)y = (3+i)x - 4(2i-1)y - 7 + 9i$.

4. Řešte následující rovnice:

   (a) $(1+i)z = 2i$

   (b) $(8-3i)z = 1 + i\sqrt{2}$

   (c) $(5-i)z = \frac{3i}{7+6i}$

5. Napište v goniometrickém tvaru komplexní čísla

   (a) $-1 + i\sqrt{3}$

   (b) $-\sqrt{2}(1-i)$

   (c) $3 - i\sqrt{3}$

6. Řešte následující rovnice:

   (a) $x^3 = 8$

   (b) $x^4 + 2 = 0$

   (c) $x^3 + 1 = 0$

   (d) $x^5 - 1 = 0$

   (e) $7x^3 + 24 = 0$