Sbírka příkladů z okruhů a polynomů pro předmět Matematika II

Kapitoly a příklady označené hvězdičkou přesahují svým obsahem nebo obtížností požadavky ke zkoušce.

1 Okruhy

Komplexní čísla

1. Určete všechna komplexní řešení rovnice $x^n = 2$ pro $n \in \mathbb{N}$.

2. Nalezněte rovnici, jejíž komplexní řešení tvoří v Gaussově rovině rovnostanný trojúhelník se středem v nule a jedním vrcholem v i.

3. Řešte v $\mathbb{C}$ kvadratickou rovnici $x^2 + (1+3i)x + i - 2 = 0$.

4.* Určete všechna komplexní řešení rovnice $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Okruhy, podokruhy

5. Rozhodněte, zda množina M je podokruhem okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$:
a) $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{R}\}$,
b) $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{C}\}$,
c) $M = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}\}$,
d) $M = \{3a + bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$,
e) $M = \{a + 2bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$,
f) $M = \{\frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$.

6. Určete, které prvky náleží nejmenšímu podokruhu okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ obsahujícímu číslo a pro
a) $a = \sqrt{3}$,
b) $a = \sqrt[5]{2}$,
c) $a = i$,
d) $a = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \xi_3$,
e) $a = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7} = \xi_7$,
f) $a = \pi$,
g) $a = \sqrt{n}$,
h) $a = \sqrt[3]{n}$,
i) $a = \sqrt{n}i$.

7. Nechť $(R, +, \cdot)$ je komutativní okruh. Rozhodněte, zda je okruh i
a) $(R, +, \Box)$, kde $\Box$ je operace definovaná vztahem $a \Box b = a \cdot b + b \cdot a$ pro libovolné $a, b \in R$,
b) $(R, +, +)$.

Obory integrity, invertibilní prvky okuhů, tělesa

8. Rozhodněte, zda následující podmnožina A okruhu racionálních čísel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je okruh, případně obor integrity. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.
a) $A = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, 3 \nmid q\}$
b) $A = \{\frac{m}{3^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$
c) $A = \{\frac{m}{6^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$

9. Rozhodněte, zda následující podmnožina M okruhu komplexních čísel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je okruh, obor integrity, popřípadě těleso. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.
a) $M = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
b) $M = \{a + b \cdot \sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
c) $M = \{a + b \cdot \sqrt[3]{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
d) $M = \{a + b \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$

10. Rozhodněte, zda je $(M, \oplus, \odot)$ okruh, obor integrity, těleso:
a) $M = \mathbb{Z}, x \oplus y = x + y - 1, x \odot y = x \cdot y - 1$
b) $M = \mathbb{Z}$, $x \oplus y = x + y - 1$, $x \odot y = x + y - xy$
c) $M = \mathbb{Q}$, operace jako v b)
d) $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, $(x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v)$, $(x, y) \odot (u, v) = (xu + 2yv, xv + yu)$
e) $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $(x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v)$, $(x, y) \odot (u, v) = (xu + yv, xv + yu + yv)$

11.* Nalezněte invertibilní prvky okruhu $(\{a + b \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$

12.* Pro prvky z příkladu 6 najděte nejmenší podtěleso tělesa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ obsahující daný prvek.

Homomorfismy okruhů

13. Uvažujme zobrazení $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definované takto:
a) $f(a + bi) = a + b$,
b) $f(a + bi) = a^2 + b^2$,
c) $f(a + bi) = a - bi$,
pro $a, b \in \mathbb{R}$. Rozhodněte, zda je f homomorfismus okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

14.* Určete, zda je okruh $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ oborem integrity. Je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$?

15. Dokažte, že okruh $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ z příkladu 10 b) je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

16. Určete všechny čtveřice $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ takové, že předpis $\alpha(r + si) = (ar + bs) + (cr + ds)i$, pro $r, s \in \mathbb{R}$, definuje homomorfismus $\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ okruhu $\mathbb{C}$ do sebe. Pro které z nich se jedná o izomorfismus?

17.* Buď $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ podokruh okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Ukažte, že $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ je těleso. Dokažte, že libovolný okruhový homomorfismus $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{C}$ je identický na množině racionálních čísel, tj. $\forall r \in \mathbb{Q} : \alpha(r) = r$. Popište všechny okruhové homomorfismy $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \to \mathbb{C}$. Které z nich jsou izomorfismy?

2 Polynomy

Dělení v okruzích polynomů

18. V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy
a) $(x^5 + x^3 - 2x + 1) : (-x^3 + x + 1)$,
b) $(3x^3 + 10x^2 + 2x - 3) : (5x^2 + 25x + 30)$,
c) $(12x^4 + 3x^3 - 4x + 3) : (2x^2 - 1)$,
d) $(x^6 + x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$.

19. V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy
a) $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) : (x - 2)$,
b) $(4x^4 - 3x^2 - x + 2) : (3x + 1)$.

Kořeny polynomů

20. Uvažme polynom $f = x^6 - 6x^5 + 9x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 16 \in \mathbb{Q}[x]$. Dokažte, že $c = 2$ je kořenem a určete jeho násobnost.

21. Určete hodnotu koeficientu $a \in \mathbb{Q}$ tak, aby polynom $f = x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ měl dvojnásobný kořen $c = -1$.

22. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $c = 1$
a) dvojnásobným kořenem polynomu $nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1 \in \mathbb{Z}[x]$,
b) trojnásobným kořenem polynomu $x^{2n} - nx^{n+1} + (n + 1)x^{n-1} - 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

Taylorův rozvoj polynomu

23. Vyjádřete polynom $f = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ v mocninách lineárního polynomu $x + 1$.

24. Vyjádřete polynom $f = (x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20$ bez počítání jednotlivých mocnin polynomu $x - 2$.

Racionální kořeny polynomů

25. Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu v $\mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost.
a) $12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6$
b) $4x^7 - 16x^6 + x^5 + 55x^4 - 35x^3 - 38x^2 + 12x + 8$
c) $4x^7 - 23x^5 + 17x^4 + 31x^3 - 49x^2 + 24x - 4$
d) $2x^7 - 3x^6 - 20x^5 - x^4 + 66x^3 + 91x^2 + 48x + 9$
e) $4x^5 + 8x^4 - 27x^3 - 79x^2 - 56x - 12$
f) $4x^5 - 35x^3 + 15x^2 + 40x + 12$
g) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$
h) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$
i) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$
j) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$
k) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$
l) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$
m) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$
n) $2x^7 - 3x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 10x^3 + x^2 + 4x + 4$
o) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1$
p) $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$
q) $f = 12x^7 - 56x^6 + 115x^5 - 141x^4 + 103x^3 - 35x^2 - 3x + 9$
r) $g = 8x^7 - 44x^6 + 70x^5 - 17x^4 - 24x^3 + 10x^2 + 2x - 1$

26. Určete takové $a \in \mathbb{C}$, pro něž má polynom $f = 2x^6 - x^5 - 11x^4 - x^3 + ax^2 + 2ax + 8 \in \mathbb{C}[x]$ kořen 2. Pro toto a určete všechny racionální kořeny polynomu f včetně násobností.

Rozklad polynomů

27. Určete všechna $a \in \mathbb{Z}$, pro která má polynom $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax - 4$ racionální kořen.

28. Napište rozklad polynomu na součin ireducibilních faktorů postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
a) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$
b) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$
c) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$
d) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$
e) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$
f) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$
g) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$

29. Napište rozklady na součin ireducibilních polynomů postupně nad $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ těch polynomů z Příkladu 25, u kterých znáte dostatek racionálních kořenů.

30. Určete všechny kořeny polynomu
a) $f = 4x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + x + 2 \in \mathbb{C}[x]$,
b) $f = 4x^5 - 12x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{C}[x]$,
víte-li, že má tři kořeny racionální. Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Komplexně sdružené kořeny

31. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 8x + 4 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $1 + i$. Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

32. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají jednoduchý kořen $-\frac{1}{3}$ a dvojnásobný kořen $3 + 2i$, nalezněte polynom nejmenšího stupně. Rozložte tento polynom na ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

33. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^6 - 7x^5 + 20x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 55x + 50 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $2 - i$. Rozložte jej na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

34. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají dvojnásobný kořen $\frac{1}{2}$ a dvojnásobný kořen
a) $1 - i$,
b) $1 - 2i$,
nalezněte polynom nejmenšího stupně. Zapište rozklad tohoto polynomu na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

35. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^4 + 4x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost, víte-li, že jedním z kořenů je číslo $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$.

36. Víme, že polynom $f = 4x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{C}[x]$ má dvojnásobný kořen $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Určete zbývající kořeny polynomu f.

37. Uveďte příklad polynomu v $\mathbb{R}[x]$, resp. v $\mathbb{Z}[x]$, jehož kořenem je
a) $1 + i$,
b) $2 + \sqrt{3}i$,
c) $\sqrt{3} - 5i$.

Polynomy nad $\mathbb{Z}_p$

38. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^5 + 5x^4 - x^2 - x + 3$ v $\mathbb{Z}_7$.

39. Určete všechny ireducibilní polynomy
a) nad $\mathbb{Z}_2$ stupně menšího než 5,
b) nad $\mathbb{Z}_3$ stupně menšího než 4.

40. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ v $\mathbb{Z}_3[x]$ a určete jejich násobnost.

41. Určete nějaký prvek $a \in \mathbb{Z}_5$ takový, že polynom $x^3 + x^2 + ax + 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}_5$.

42. Určete všechny prvky $a \in \mathbb{Z}_7$, pro které je polynom $x^3 + x^2 + x + a$ ireducibilní nad $\mathbb{Z}_7$.

43. Udejte příklad polynomu
a) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 5, má dvojnásobný kořen 2 a žádné jiné kořeny nemá,
b) $g \in \mathbb{Z}_2[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen,
c) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 4, není ireducibilní a nemá žádný kořen,
d) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen,
e) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 6, má dvojnásobný kořen 2, jednoduchý kořen 4 a který nemá žádné další kořeny.

44. Rozložte polynomy na ireducibilní faktory.
a) $x^6 + x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$
b) $x^7 + 3x^6 + 2x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$
c) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$
d) $x^7 - x^6 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$
e*) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$
f) $x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$
g*) $x^5 + 3x^3 + x + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$

Eisensteinovo kritérium *

45. Ukažte, že polynom
a) $x^n + p$, kde $n \in \mathbb{N}$, p je prvočíslo,
b) $x^6 + x^3 + 1$,
je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

46. Najděte $n \in \mathbb{N}$ takové, že $x^2 - n$ je ireducibilní, ale nesplňuje podmínku Eisensteinova kritéria.

47. Najděte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby polynom $x^n + n$
a) byl
b) nebyl
ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

48. Určete, který z polynomů $f = x^5 + 3x^3 - 9x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$ a $g = x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 3 \in \mathbb{Z}[x]$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$ a který lze rozložit na součin polynomů nižšího stupně. Napište rozklady polynomů f a g na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}$.

Euklidův aloritmus, Bezoutova rovnost

49. Nalezněte polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, které jsou stupně 3, každý z nich má alespoň jeden alespoň dvojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je
a) $x^2 + x - 6$,
b) $x^2 + x - 2$,
c) $x^2 + 2x - 3$.
Vyjádřete největší společný dělitel polynomů f, g Bezoutovou rovností.

50. Nalezněte polynomy $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, které jsou stupně 4, každý z nich má alespoň jeden alespoň trojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je
a) $x^2 + x - 2$,
b) $x^2 + 2x - 3$,
c) $x^2 - 2x - 3$.
Vyjádřete tento největší společný dělitel polynomů f, g Bezoutovou rovností.

51. Pro dané dvojice polynomů $f, g \in \mathbb{R}[x]$ najděte normovaný polynom, který je jejich největším společným dělitelem. Najděte koeficienty do příslušné Bezoutovy rovnosti.
a) $f = x^4 + 1, g = x^3 - 1$
b) $f = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, g = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$
c) $f = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x - 3, g = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 3$

Násobné kořeny *

52. Nalezňte všechny aspoň dvojnásobné kořeny polynomu
a) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$,
b) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$,
c) $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 5x + 1$,
d) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$.

53. Rozložte v $\mathbb{C}[x]$ na lineární faktory polynom
a) $x^4 + 2ix^3 + x^2 + 2ix + 1$, víte-li, že má dvojnásobný kořen,
b) $x^4 + 6x^2 - 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.
c) $x^4 - 4x^2 + 16x + 32$, víte-li, že má alespoň jeden kořen vícenásobný.
d) $x^5 + 10x^3 - 20ix^2 - 15x + 4i$, víte-li, že má čtyřnásobný kořen.
e) $x^3 - 6ix + 4 - 4i$, víte-li, že má dvojnásobný kořen.
f) $x^4 + 6x^2 + 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.

Rozklad racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků

54. Rozložte racionální lomenou funkci na součet parciálních zlomků nad $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{x^2-x+1}{x^6+2x^4+x^2}$

b) $\frac{x^3-4x^2-4x-2}{x^6-2x^3+1}$

c) $\frac{3x^4+3x^2-7x-7}{x^5-3x^4+4x^3-12x^2+4x-12}$

d) $\frac{x^4+x^2-1}{x^6-10x^3+25}$

e) $\frac{x^5-x^4-x^3+x^2+x-1}{x^6-6x^4+12x^2-8}$

f) $\frac{4x^4+2x^3+15x^2+7}{x^5-2x^4+6x^3-12x^2+9x-18}$

g) $\frac{8x^3-9x^2-18x+22}{4x^4-16x^3+25x^2-21x+9}$

h) $\frac{21x^3-16x^2-12x+1}{9x^4-3x^3+13x^2+11x+2}$

i) $\frac{3x^4+2x^3-17x^2-7x-7}{2x^5-7x^4+6x^3-3x^2+4x+4}$

j) $\frac{8x^4+2x^3+3x^2+3x+6}{3x^5+5x^4+7x^3+9x^2+2x-2}$

k) $\frac{5x^3+7x^2-6x-10}{x^5+4x^4+2x^3-4x^2+8x+16}$

l) $\frac{x^3-2x^2-x+16}{x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8}$