# Sbírka příkladů z okruhů a polynomů pro předmět Matematika II

Kapitoly a příklady označené hvězdičkou přesahují svým obsahem nebo obtížností požadavky ke zkoušce.

## 1 Okruhy

### Komplexní čísla

**1.** Určete všechna komplexní řešení rovnice $x^n = 2$ pro $n \in \mathbb{N}$.

[ $\sqrt[n]{2}(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}); k = 0, \dots, n-1$ ]

**2.** Nalezněte rovnici, jejíž všechna komplexní řešení tvoří v Gaussově rovině rovnostanný trojúhelník se středem v nule a jedním vrcholem v $i$.

[ $x^3 = -i$ ]

**3.** Řešte v $\mathbb{C}$ kvadratickou rovnici $x^2 + (1+3i)x + i - 2 = 0$.

[ $-i, -1-2i$ ]

**4.*** Určete všechna komplexní řešení rovnice $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

[*Jsou to páté odmocniny z jedné, různé od 1; tj.* $x_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}, k = 1, 2, 3, 4$. *Jinak zapsáno:* $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, x_3 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, x_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i$ ]

### Okruhy, podokruhy

**5.** Rozhodněte, zda daná množina $M$ je podokruhem okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$:

a) $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{R}\}$, [*ne* ]
b) $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{C}\}$, [*ano* ]
c) $M = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}\}$, [*ne* ]
d) $M = \{3a + bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$, [*ne* ]
e) $M = \{a + 2bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$, [*ano* ]
f) $M = \{\frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$. [*ano* ]

**6.** Určete, které prvky náleží nejmenšímu podokruhu okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ obsahujícímu číslo $a$ pro

a) $a = \sqrt{3}$, [ $k + l\sqrt{3}; k, l \in \mathbb{Z}$ ]
b) $a = \sqrt[5]{2}$, [ $k_0 + k_1\sqrt[5]{2} + k_2\sqrt[5]{4} + k_3\sqrt[5]{8} + k_4\sqrt[5]{16}; k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$ ]
c) $a = i$, [ $k + li; k, l \in \mathbb{Z}$ ]
d) $a = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \xi_3$, [ $k_0 + k_1\xi_3; k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$ ]
e) $a = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7} = \xi_7$, [ $k_0 + k_1\xi_7 + \ldots + k_5\xi_7^5; k_0, k_1, \ldots, k_5 \in \mathbb{Z}$ ]
f) $a = \pi$, [ $k_0 + k_1\pi + \ldots + k_n\pi^n; n \in \mathbb{N}; k_0, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ ]
g) $a = \sqrt{n}$, [ $k + l\sqrt{n}; k, l \in \mathbb{Z}$ ]
h) $a = \sqrt[3]{n}$, [ $k_0 + k_1\sqrt[3]{n} + k_2\sqrt[3]{n^2}; k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ]
i) $a = \sqrt{n}i$. [ $k + l\sqrt{n}i; k, l \in \mathbb{Z}$ ]

**7.** Nechť $(R, +, \cdot)$ je komutativní okruh. Rozhodněte, zda je okruh taky

a) $(R, +, \square)$, kde $\square$ je operace definovaná vztahem $a \square b = a \cdot b + b \cdot a$ pro libovolné $a, b \in R$, [*Ne* ]
b) $(R, +, +)$. [*Ne* ]

### Obory integrity, invertibilní prvky okuhů, tělesa

**8.** Rozhodněte, zda daná podmnožina $A$ okruhu racionálních čísel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je okruh, případně obor integrity. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.

a) $A = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, 3 \nmid q\}$ [*obor integrity; inv. prvky:* $\frac{p}{q}$, *kde* $p, q \in \mathbb{Z}, 3 \nmid p, q$ ]
b) $A = \{\frac{m}{3^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ [*obor integrity; inv. prvky:* $\pm 3^k$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$ ]
c) $A = \{\frac{m}{6^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ [*obor integrity; inv. prvky:* $\pm 2^k \cdot 3^l$, *kde* $k, l \in \mathbb{Z}$ ]

**9.** Rozhodněte, zda následující podmnožina $M$ okruhu komplexních čísel $(\mathbb{C},+,\cdot)$ je okruh, obor integrity, případně těleso. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.

a) $M=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ [*obor integrity*]

b) $M=\{a+b\cdot\sqrt{5} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ [*těleso*]

c) $M=\{a+b\cdot\sqrt[3]{5} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ [*nic*]

d) $M=\{a+b\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ [*těleso*]

**10.** Rozhodněte, zda $(M,\oplus,\odot)$ je okruh, obor integrity, těleso:

a) $M=\mathbb{Z}, x\oplus y=x+y-1, x\odot y=x\cdot y-1$ [*nic*]

b) $M=\mathbb{Z},\ x\oplus y=x+y-1,\ x\odot y=x+y-xy$ [*obor integrity*]

c) $M=\mathbb{Q}$, operace jako v b) [*těleso*]

d) $M=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},\ (x,y)\oplus(u,v)=(x+u,y+v),\ (x,y)\odot(u,v)=(xu+2yv,xv+yu)$ [*těleso*]

e) $M=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\ (x,y)\oplus(u,v)=(x+u,y+v),\ (x,y)\odot(u,v)=(xu+yv,xv+yu+yv)$ [*těleso*]

**11.*** Nalezněte invertibilní prvky okruhu $(\{a+b\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a,b\in\mathbb{Z}\},+,\cdot)$

[$1,-1,1-\xi,-1+\xi,\xi,-\xi,$ *kde* $\xi=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$]

**12.*** Pro prvky z příkladu 6 najděte nejmenší podtěleso tělesa $(\mathbb{C},+,\cdot)$ obsahující daný prvek.

### Homomorfismy okruhů

**13.** Rozhodněte, zda zobrazení $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je homomorfismus okruhu $(\mathbb{C},+,\cdot)$ do okruhu $(\mathbb{C},+,\cdot)$, je-li pro $a,b\in\mathbb{R}$ dáno:

a) $f(a+bi)=a+b,$ [*Ne*]

b) $f(a+bi)=a^2+b^2,$ [*Ne*]

c) $f(a+bi)=a-bi.$ [*Ano*]

**14.*** Určete, zda je okruh $(\mathbb{Z}_2,+,\cdot)\times(\mathbb{Z}_3,+,\cdot)$ oborem integrity. Je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}_6,+,\cdot)$?

**15.** Dokažte, že okruh $(\mathbb{Z},\oplus,\odot)$ z příkladu 10 b) je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z},+,\cdot)$.

**16.** Určete všechny čtveřice $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ takové, že předpis $\alpha(r+si)=(ar+bs)+(cr+ds)i$, pro $r,s\in\mathbb{R}$, definuje homomorfismus $\alpha:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ okruhu $\mathbb{C}$ do sebe. Pro které z nich se jedná o izomorfismus?

**17.*** Buď $\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ podokruh okruhu $(\mathbb{R},+,\cdot)$. Ukažte, že $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}),+,\cdot)$ je těleso. Dokažte, že libovolný okruhový homomorfismus $\alpha:\mathbb{Q}(\sqrt{3})\to\mathbb{C}$ je identický na množině racionálních čísel, tj. $\forall r\in\mathbb{Q}:\alpha(r)=r$. Popište všechny okruhové homomorfismy $\alpha:\mathbb{Q}(\sqrt{3})\to\mathbb{C}$. Které z nich jsou izomorfismy?

## 2 Polynomy

### Dělení v okruzích polynomů

**18.** V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy

a) $(x^5+x^3-2x+1):(-x^3+x+1),$ [*podíl:* $-x^2-2$*, zbytek:* $x^2+3$]

b) $(3x^3+10x^2+2x-3):(5x^2+25x+30),$ [*podíl:* $\frac{3}{5}x-1$*, zbytek:* $9x+27$]

c) $(12x^4+3x^3-4x+3):(2x^2-1),$ [*podíl:* $6x^2+\frac{3}{2}x+3$*, zbytek:* $-\frac{5}{2}x+6$]

d) $(x^6+x^4+x^2+1):(x^2-x+1).$ [*podíl:* $x^4+x^3+x^2$*, zbytek:* $1$]

**19.** V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy:

a) $(2x^3+3x^2-4x+5):(x-2),$ [*podíl:* $2x^2+7x+10$*, zbytek:* $25$]

b) $(4x^4-3x^2-x+2):(3x+1).$ [*podíl:* $\frac{4}{3}x^3-\frac{4}{9}x^2-\frac{23}{27}x-\frac{4}{81}$*, zbytek:* $\frac{166}{81}$]

**Kořeny polynomů**

**20.** Uvažme polynom $f(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 16 \in \mathbb{Q}[x]$. Dokažte, že $c = 2$ je kořenem polynomu $f$ a určete jeho násobnost $n$.

$[n = 4\ ]$

**21.** Určete hodnotu koeficientu $a \in \mathbb{Q}$ tak, aby polynom $f = x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ měl dvojnásobný kořen $c = -1$.

$[a = -5\ ]$

**22.** Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $c = 1$ dvojnásobným kořenem polynomu $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

**Taylorův rozvoj polynomu**

**23.** Vyjádřete polynom $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ v mocninách lineárního polynomu $x + 1$.

$[f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1\ ]$

**24.** Vyjádřete polynom $f(x) = (x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20$ bez počítání jednotlivých mocnin polynomu $x - 2$.

$[f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x + 8\ ]$

**Racionální kořeny polynomů**

**25.** Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu v $\mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost.

a) $12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6$

$[1, 2, -3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ ]$

b) $4x^7 - 16x^6 + x^5 + 55x^4 - 35x^3 - 38x^2 + 12x + 8$

$[2, 2, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\ ]$

c) $4x^7 - 23x^5 + 17x^4 + 31x^3 - 49x^2 + 24x - 4$

$[1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2, -2\ ]$

d) $2x^7 - 3x^6 - 20x^5 - x^4 + 66x^3 + 91x^2 + 48x + 9$

$[3, 3, -\frac{1}{2}, -1, -1, -1, -1\ ]$

e) $4x^5 + 8x^4 - 27x^3 - 79x^2 - 56x - 12$

$[3, -2, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\ ]$

f) $4x^5 - 35x^3 + 15x^2 + 40x + 12$

$[-3, 2, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\ ]$

g) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

$[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 1\ ]$

h) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$

$[-\frac{2}{5}\ ]$

i) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$

$[-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\ ]$

j) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$

$[0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\ ]$

k) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$

$[-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\ ]$

l) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$

$[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3\ ]$

m) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$

$[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\ ]$

n) $2x^7 - 3x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 10x^3 + x^2 + 4x + 4$

$[2, 2, -1, -1, -1\ ]$

o) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1$

$[-1, -1\ ]$

p) $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

$[-1, 1, 1, 1, 2\ ]$

q) $f = 12x^7 - 56x^6 + 115x^5 - 141x^4 + 103x^3 - 35x^2 - 3x + 9$

$[-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$

r) $g = 8x^7 - 44x^6 + 70x^5 - 17x^4 - 24x^3 + 10x^2 + 2x - 1$

$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

**26.** Určete takové $a \in \mathbb{C}$, pro něž má polynom $f = 2x^6 - x^5 - 11x^4 - x^3 + ax^2 + 2ax + 8 \in \mathbb{C}[x]$ kořen 2. Pro toto $a$ určete všechny racionální kořeny polynomu $f$ včetně násobností.

[$a = 10$; *kořeny:* $2, 2, -2, -\frac{1}{2}$]

**27.** Určete všechna $a \in \mathbb{Z}$, pro něž má polynom $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax - 4$ racionální kořen. [$a \in \{-83, -8, 4, 19\}$]

**Rozklad polynomů**

**28.** Napište rozklad polynomu na součin ireducibilních faktorů postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

$[\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} : (x + \frac{2}{3})(x - \frac{1}{2})(x - 1)]$

b) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$

$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : 5(x + \frac{2}{5})(x^2 - 2x + 3)]$
$[\mathbb{C} : 5(x + \frac{2}{5})(x - 1 - i\sqrt{2})(x - 1 + i\sqrt{2})]$

c) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$

$[\mathbb{Q} : 12(x + \frac{2}{3})(x - \frac{1}{4})(x^2 - x - 1)]$
$[\mathbb{R}, \mathbb{C} : 12(x + \frac{2}{3})(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})]$

d) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$

$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : 3x(x - \frac{2}{3})^2(x^2 + x + 1)]$
$[\mathbb{C} : 3x(x - \frac{2}{3})^2(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})]$

e) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$

$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : 6(x + \frac{2}{3})(x - \frac{3}{2})(x^2 + x + 2)]$
$[\mathbb{C} : 6(x + \frac{2}{3})(x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2})(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2})]$

f) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$

$[\mathbb{Q} : 4(x - \frac{3}{2})^2(x^4 - 3)]$
$[\mathbb{R} : 4(x - \frac{3}{2})^2(x + \sqrt[4]{3})(x - \sqrt[4]{3})(x^2 + \sqrt{3})]$
$[\mathbb{C} : 4(x - \frac{3}{2})^2(x + \sqrt[4]{3})(x - \sqrt[4]{3})(x - i\sqrt[4]{3})(x + i\sqrt[4]{3})]$

g) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$

$[\mathbb{Q} : (3x + 1)^2(x - 3)(x^3 + 2)]$
$[\mathbb{R} : (3x + 1)^2(x - 3)(x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})]$
$[\mathbb{C} : (3x + 1)^2(x - 3)(x + \sqrt[3]{2})(x - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2})((x - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}))]$

**29.** Napište rozklady na součin ireducibilních polynomů postupně nad $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ těch polynomů z Příkladu 25, u kterých znáte dostatek racionálních kořenů.

**30.** Určete všechny kořeny polynomu $f$, víte-li, že má tři kořeny racionální. Rozložte $f$ na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $f(x) = 4x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + x + 2 \in \mathbb{C}[x]$,

$[2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}]$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - 2)(2x - 1)(2x + 1)(x^2 + x + 1)]$
$[\mathbb{C} : (x - 2)(2x - 1)(2x + 1)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)]$

b) $f(x) = 4x^5 - 12x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{C}[x]$.

$[4, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}]$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - 4)(2x - 1)(2x + 1)(x^2 + x + 1)]$
$[\mathbb{C} : (x - 4)(2x - 1)(2x + 1)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)]$

**Komplexně sdružené kořeny**

**31.** Určete všechny kořeny polynomu $f = x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 8x + 4 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $1 + i$. Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$[1+i, 1+i, 1-i, 1-i, -1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ]$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x+1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 2x + 2)^2\ ]$
$[\mathbb{C} : (x+1)(x-1+i)^2(x-1-i)^2(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)\ ]$

**32.** Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají jednoduchý kořen $-\frac{1}{3}$ a dvojnásobný kořen $3 + 2i$, nalezněte polynom nejmenšího stupně. Rozložte tento polynom na ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$[x^5 - \frac{35}{3}x^4 + 58x^3 - \frac{406}{3}x^2 + 117x + \frac{169}{3}\ ]$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x + \frac{1}{3})(x^2 - 6x + 13)^2\ ]$
$[\mathbb{C} : (x + \frac{1}{3})(x - 3 + 2i)^2(x - 3 - 2i)^2\ ]$

**33.** Určete všechny kořeny polynomu $f = x^6 - 7x^5 + 20x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 55x + 50 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $2 - i$. Rozložte jej na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$[2-i, 2-i, 2+i, 2+i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i\ ]$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x^2 - 4x + 5)^2(x^2 + x + 2)\ ]$
$[\mathbb{C} : (x - 2 + i)^2(x - 2 - i)^2(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i)\ ]$

**34.** Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají dvojnásobný kořen $\frac{1}{2}$ a dvojnásobný kořen $k$ nalezněte polynom nejmenšího stupně. Zapište rozklad tohoto polynomu na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $k = 1 - i$,

$[x^6 - 5x^5 + \frac{49}{4}x^4 - 17x^3 + 14x^2 - 6x + 1\ ]$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - \frac{1}{2})^2(x^2 - 2x + 2)^2\ ]$
$[\mathbb{C} : (x - \frac{1}{2})^2(x - 1 + i)^2(x - 1 - i)^2\ ]$

b) $k = 1 - 2i$.

$[x^6 - 5x^5 + \frac{73}{4}x^4 - 35x^3 + \frac{97}{2}x^2 - 30x + \frac{25}{4}\ ]$
$[\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - \frac{1}{2})^2(x^2 - 2x + 5)^2\ ]$
$[(x - \frac{1}{2})^2(x - 1 + 2i)^2(x - 1 - 2i)^2\ ]$

**35.** Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^4 + 4x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost, víte-li, že jedním z kořenů je číslo $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$.

$[\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}, \frac{1+i\sqrt{11}}{2}, \frac{1-i\sqrt{11}}{2}\ ]$

**36.** Víme, že polynom $f = 4x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{C}[x]$ má dvojnásobný kořen $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Určete zbývající kořeny polynomu $f$.

$[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\ ]$

**37.** Uveďte příklad polynomu v $\mathbb{R}[x]$, resp. v $\mathbb{Z}[x]$, jehož kořenem je

a) $1 + i$,

$[\mathbb{R}[x], \mathbb{Z}[x] : x^2 - 2x + 2\ ]$

b) $2 + \sqrt{3}i$,

$[\mathbb{R}[x], \mathbb{Z}[x] : x^2 - 4x + 27\ ]$

c) $\sqrt{3} - 5i$.

$[\mathbb{R}[x], \mathbb{Z}[x] : x^4 + 44x^2 + 784; \mathbb{R}[x] : x^2 - 2\sqrt{3}x + 28\ ]$

**Polynomy nad $\mathbb{Z}_p$**

**38.** Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^5 + 5x^4 - x^2 - x + 3$ v $\mathbb{Z}_7$.

$[[1]_7, [5]_7, [5]_7, [6]_7, [6]_7\ ]$

**39.** Určete všechny ireducibilní polynomy nad

a) $\mathbb{Z}_2$ stupně menšího než 5, [$x, x+1, x^2+x+1, x^3+x+1, x^3+x^2+1, x^4+x+1, x^4+x^3+1, x^4+x^3+x^2+x+1$ ]

b) $\mathbb{Z}_3$ stupně menšího než 4. [$x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2, x^2+1, 2x^2+2, x^2+x+2, x^2+2x+2, 2x^2+x+1, 2x^2+2x+1, x^3+2x+1, 2x^3+x+2, x^3+2x+2, 2x^3+x+1, x^3+x^2+2, 2x^3+2x^2+1, x^3+2x^2+1, 2x^3+x^2+2, x^3+x^2+x+2, 2x^3+2x^2+2x+1, x^3+x^2+2x+1, 2x^3+2x^2+x+2, x^3+2x^2+x+1, 2x^3+x^2+2x+2, x^3+2x^2+2x+2, 2x^3+x^2+x+1$ ]

**40.** Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ v $\mathbb{Z}_3[x]$ a určete jejich násobnost.

[$[-1]_3, [-1]_3, [-1]_3, [-1]_3, [1]_3, [1]_3$ ]

**41.** Určete nějaký prvek $a \in \mathbb{Z}_5$ takový, že polynom $x^3 + x^2 + ax + 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}_5$.

[$a \in \{[0]_5, [3]_5, [4]_5\}$ ]

**42.** Určete všechny prvky $a \in \mathbb{Z}_7$, pro které je polynom $x^3 + x^2 + x + a$ ireducibilní nad $\mathbb{Z}_7$.

[$a \in \{[2]_7, [5]_7\}$ ]

**43.** Udejte příklad polynomu

a) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 5, má dvojnásobný kořen 2 a žádné jiné kořeny nemá, [$x^3 + x^2 + x + 3$ ]

b) $g \in \mathbb{Z}_2[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen, [$x^5 + x^4 + 1$ ]

c) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 4, není ireducibilní a nemá žádný kořen, [$x^4 + 2x^2 + 1$ ]

d) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen, [$x^5 + x^4 + 2x^3 + x + 2$ ]

e) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 6, má dvojnásobný kořen 2, jednoduchý kořen 4 a který nemá žádné další kořeny. [$x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x - 1$ ]

**44.** Rozložte polynomy na ireducibilní faktory.

a) $x^6 + x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ [$(x^3 + x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)$ ]

b) $x^7 + 3x^6 + 2x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ [$(x + 1)^2(x + 2)^3(x^2 + 2)$ ]

c) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ [$(x + 1)(x^2 + x + 1)^2$ ]

d) $x^7 - x^6 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ [$(x + 2)(x + 1)^2(x^2 + 2)(x^2 + 3)$ ]

e*) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ [$(x - 1)(x^2 - x - 1)(x^2 + 1)$ ]

f) $x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ [$(x^2 + x + 1)(x + 1)^2$ ]

g*) $x^5 + 3x^3 + x + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$ [$(x + 2)(x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 4)$ ]

h) $x^5 + x^3 + 2x^2 + 2$ [$(x + 2)(x^2 + x + 4)(x^2 + 2x + 4)$ ]

### Eisensteinovo kritérium *

**45.** Ukažte, že polynom $f(x)$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$:

a) $f(x) = x^n + p$; $n \in \mathbb{N}$, $p$ je prvočíslo,

[*plyne z E. k. volbou prvočísla* $p$ ]

b) $f(x) = x^6 + x^3 + 1$.

[$f(x) = (x - 1)^6 + 6(x - 1)^5 + 15(x - 1)^4 + 21(x - 1)^3 + 18(x - 1)^2 + 9(x - 1) + 3$ ]

[*plyne z E. k. volbou prvočísla* $p = 3$ ]

**46.** Najděte $n \in \mathbb{N}$ takové, že polynom $x^2 - n$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$, ale nesplňuje podmínku Eisensteinova kritéria.

[$n = 8$ ]

**47.** Najděte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby polynom $p(x) = x^n + n$

a) byl ireducibilní nad $\mathbb{Q}$,

[$n = 2$ ]

b) nebyl ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

[$n = 4 : p(x) = x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$, $n = 27 : p(x) = x^{27} + 27 = (x^9 + 3)(x^{18} - 3x^9 + 9)$ ]

**48.** Určete, který z polynomů $f(x) = x^5 + 3x^3 - 9x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$ a $g(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 3 \in \mathbb{Z}[x]$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}$ a který lze nad $\mathbb{Z}$ rozložit na součin polynomů nižšího stupně. Napište rozklady polynomů $f$ a $g$ na ireducibilní faktory nad $\mathbb{Z}$.

[*$f$ je ireducibilní:* $f(x) = x^5 + 3x^3 - 9x + 3$, *plyne z E. k. pro* $p = 3$ ]

[*$g$ není ireducibilní:* $g(x) = (x^2 + x - 1)(x^2 + 3x + 3)$ ]

**Euklidův aloritmus, Bezoutova rovnost**

**49.** Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, které jsou stupně 3, každý z nich má alespoň jeden alespoň dvojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je:

a) $x^2 + x - 6$,

$[f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x-2)^2(x+3); g(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = (x-2)(x+3)^2\ ]$

b) $x^2 + x - 2$,

$[f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2); g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x-1)(x+2)^2\ ]$

c) $x^2 + 2x - 3$.

$[f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x-1)^2(x+3); g(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x-1)(x+3)^2\ ]$

Vyjádřete největší společný dělitel polynomů $f, g$ Bezoutovou rovností.

$[x^2 + x - 6 = f(-\frac{1}{5}) + g\frac{1}{5}; x^2 + x - 2 = f(-\frac{1}{3}) + g\frac{1}{3}; x^2 + 2x - 3 = f(-\frac{1}{4}) + g\frac{1}{4}\ ]$

**50.** Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, které jsou stupně 4, každý z nich má alespoň jeden alespoň trojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je:

a) $x^2+x-2$, $[f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x-1)^3(x+3); g(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x-1)(x+3)^3$
]

b) $x^2 + 2x - 3$, $[f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^3(x+2); g(x) = x^4 + 8x^3 + 18x - 27 = (x-1)(x+2)^3\ ]$

c) $x^2 - 2x - 3$. $[f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27 = (x-3)^3(x+1); g(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = (x-3)(x+1)^3\ ]$

Vyjádřete největší společný dělitel polynomů $f, g$ Bezoutovou rovností.

$[x^2 + x - 2 = f(\frac{2}{27}x + \frac{7}{27}) + g(-\frac{2}{27}x + \frac{5}{27}); x^2 + 2x - 3 = f(\frac{1}{32}x + \frac{5}{32}) + g(-\frac{1}{32}x + \frac{3}{32}); x^2 - 2x - 3 = f(\frac{1}{32}x + \frac{3}{32}) + g(-\frac{1}{32}x + \frac{5}{32})\ ]$

**51.** Pro dané dvojice polynomů $f, g \in \mathbb{R}[x]$ najděte normovaný polynom, který je jejich největším společným dělitelem. Najděte koeficienty do příslušné Bezoutovy rovnosti.

a) $f = x^4 + 1, g = x^3 - 1$

$[(f,g) = 1 = f(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) + g(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})\ ]$

b) $f = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, g = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$

$[(f,g) = x + 3 = f(\frac{3}{5}x - 1) + g(-\frac{x^2}{5} + \frac{2}{5}x)\ ]$

c) $f = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x - 3, g = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 3$

$[(f,g) = x^2 - 3x - 1 = f(\frac{5}{9}x + \frac{11}{9}) + g(-\frac{5}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9})\ ]$

**Násobné kořeny ***

**52.** Nalezněte všechny aspoň dvojnásobné kořeny polynomu:

a) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$,

$[-1+i, -1-i\ ]$

b) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$,

$[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ]$

c) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$.

$[\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}\ ]$

**53.** Rozložte v $\mathbb{C}[x]$ na lineární faktory polynom

a) $x^4 + 2ix^3 + x^2 + 2ix + 1$, víte-li, že má dvojnásobný kořen,

$[(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})^2(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})^2\ ]$

b) $x^4 + 6x^2 - 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.

$[(x-i)^3(x+3i)\ ]$

c) $x^4 - 4x^2 + 16x + 32$, víte-li, že má alespoň jeden kořen vícenásobný.

$[(x+2)^2(x-2+2i)(x-2-2i)\ ]$

d) $x^5 + 10x^3 - 20ix^2 - 15x + 4i$, víte-li, že má čtyřnásobný kořen.

$[(x-i)^4(x+4i)\ ]$

e) $x^3 - 6ix + 4 - 4i$, víte-li, že má dvojnásobný kořen.

$[(x+1+i)^2(x-2-2i)\ ]$

f) $x^4 + 6x^2 + 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.

$[(x+i)^3(x-3i)\ ]$

**Rozklad racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků**

**54.** Rozložte racionální lomenou funkci na součet parciálních zlomků nad $\mathbb{Q}$.

a) $\frac{x^2-x+1}{x^6+2x^4+x^2}$ $\qquad [\frac{-1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}]$

b) $\frac{x^3-4x^2-4x-2}{x^6-2x^3+1}$ $\qquad [\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}]$

c) $\frac{3x^4+3x^2-7x-7}{x^5-3x^4+4x^3-12x^2+4x-12}$ $\qquad [\frac{2}{x-3}+\frac{x+3}{x^2+2}+\frac{2x-1}{(x^2+2)^2}]$

d) $\frac{x^4+x^2-1}{x^6-10x^3+25}$ $\qquad [\frac{x}{x^3-5}+\frac{x^2+5x-1}{(x^3-5)^2}]$

e) $\frac{x^5-x^4-x^3+x^2+x-1}{x^6-6x^4+12x^2-8}$ $\qquad [\frac{x-1}{x^2-2}+\frac{3x-3}{(x^2-2)^2}+\frac{3x-3}{(x^2-2)^3}]$

f) $\frac{4x^4+2x^3+15x^2+7}{x^5-2x^4+6x^3-12x^2+9x-18}$ $\qquad [\frac{3}{x-2}+\frac{x+4}{x^2+3}+\frac{2x-2}{(x^2+3)^2}]$

g) $\frac{8x^3-9x^2-18x+22}{4x^4-16x^3+25x^2-21x+9}$ $\qquad [\frac{2}{2x-3}+\frac{1}{(2x-3)^2}+\frac{x+3}{x^2-x+1}]$

h) $\frac{21x^3-16x^2-12x+1}{9x^4-3x^3+13x^2+11x+2}$ $\qquad [\frac{1}{3x+1}+\frac{1}{(3x+1)^2}+\frac{2x-3}{x^2-x+2}]$

i) $\frac{3x^4+2x^3-17x^2-7x-7}{2x^5-7x^4+6x^3-3x^2+4x+4}$ $\qquad [\frac{-1}{2x+1}+\frac{3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{x-1}{x^2+1}]$

j) $\frac{8x^4+2x^3+3x^2+3x+6}{3x^5+5x^4+7x^3+9x^2+2x-2}$ $\qquad [\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{3x-1}+\frac{x-2}{x^2+2}]$

k) $\frac{5x^3+7x^2-6x-10}{x^5+4x^4+2x^3-4x^2+8x+16}$ $\qquad [\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{x-1}{x^2-2x+2}]$

l) $\frac{x^3-2x^2-x+16}{x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8}$ $\qquad [\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^3}-\frac{x+1}{x^2+x+1}]$