

Sbírka příkladů z okruhů a polynomů pro předmět Matematika II

Kapitoly a příklady označené hvězdičkou přesahují svým obsahem nebo obtížností požadavky ke zkoušce.

1 Okruhy

Komplexní čísla

1. Určete všechna komplexní řešení rovnice $x^n = 2$ pro $n \in \mathbb{N}$.

$$[\sqrt[n]{2}(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}); k = 0, \dots, n-1]$$

2. Nalezněte rovnici, jejíž všechna komplexní řešení tvoří v Gaussově rovině rovnostanný trojúhelník se středem v nule a jedním vrcholem v i .

$$[x^3 = -i]$$

3. Řešte v \mathbb{C} kvadratickou rovnici $x^2 + (1 + 3i)x + i - 2 = 0$.

$$[-i, -1 - 2i]$$

4.* Určete všechna komplexní řešení rovnice $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

[*Jsou to páté odmocniny z jedné, různé od 1; tj. $x_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}, k = 1, 2, 3, 4$. Jinak zapsáno:*

$$x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, x_3 = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, x_4 = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i]$$

Okruhy, podokruhy

5. Rozhodněte, zda daná množina M je podokruhem okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$:

- a) $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{R}\}$, [ne]
- b) $M = \{a + 2i \mid a \in \mathbb{C}\}$, [ano]
- c) $M = \{a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{N}\}$, [ne]
- d) $M = \{3a + bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$, [ne]
- e) $M = \{a + 2bi \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$, [ano]
- f) $M = \{\frac{a}{2^k} \mid a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$. [ano]

6. Určete, které prvky náležejí nejmenšímu podokruhu okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ obsahujícímu číslo a pro

- a) $a = \sqrt{3}$, [$k + l\sqrt{3}; k, l \in \mathbb{Z}$]
- b) $a = \sqrt[5]{2}$, [$k_0 + k_1\sqrt[5]{2} + k_2\sqrt[5]{4} + k_3\sqrt[5]{8} + k_4\sqrt[5]{16}; k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$]
- c) $a = i$, [$k + li; k, l \in \mathbb{Z}$]
- d) $a = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \xi_3$, [$k_0 + k_1\xi_3; k_0, k_1 \in \mathbb{Z}$]
- e) $a = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} = \xi_7$, [$k_0 + k_1\xi_7 + \dots + k_5\xi_7^5; k_0, k_1, \dots, k_5 \in \mathbb{Z}$]
- f) $a = \pi$, [$k_0 + k_1\pi + \dots + k_n\pi^n; n \in \mathbb{N}; k_0, k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$]
- g) $a = \sqrt{n}$, [$k + l\sqrt{n}; k, l \in \mathbb{Z}$]
- h) $a = \sqrt[3]{n}$, [$k_0 + k_1\sqrt[3]{n} + k_2\sqrt[3]{n^2}; k_0, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$]
- i) $a = \sqrt{ni}$. [$k + l\sqrt{ni}; k, l \in \mathbb{Z}$]

7. Nechť $(R, +, \cdot)$ je komutativní okruh. Rozhodněte, zda je okruh taky

- a) $(R, +, \square)$, kde \square je operace definovaná vztahem $a \square b = a \cdot b + b \cdot a$ pro libovolné $a, b \in R$, [Ne]
- b) $(R, +, +)$. [Ne]

Obory integrity, invertibilní prvky okruhů, tělesa

8. Rozhodněte, zda daná podmnožina A okruhu racionálních čísel $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ je okruh, případně obor integrity. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.

- a) $A = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, 3 \nmid q\}$ [obor integrity; inv. prvky: $\frac{p}{q}$, kde $p, q \in \mathbb{Z}, 3 \nmid p, q$]
- b) $A = \{\frac{m}{3^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ [obor integrity; inv. prvky: $\pm 3^k$, kde $k \in \mathbb{Z}$]
- c) $A = \{\frac{m}{6^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ [obor integrity; inv. prvky: $\pm 2^k \cdot 3^l$, kde $k, l \in \mathbb{Z}$]

9. Rozhodněte, zda následující podmnožina M okruhu komplexních čísel $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je okruh, obor integrity, případně těleso. Jde-li o okruh, charakterizujte jeho invertibilní prvky.

- a) $M = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ [obor integrity]
 b) $M = \{a + b \cdot \sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ [těleso]
 c) $M = \{a + b \cdot \sqrt[3]{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ [nic]
 d) $M = \{a + b \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ [těleso]

10. Rozhodněte, zda (M, \oplus, \odot) je okruh, obor integrity, těleso:

- a) $M = \mathbb{Z}, x \oplus y = x + y - 1, x \odot y = x \cdot y - 1$ [nic]
 b) $M = \mathbb{Z}, x \oplus y = x + y - 1, x \odot y = x + y - xy$ [obor integrity]
 c) $M = \mathbb{Q}$, operace jako v b) [těleso]
 d) $M = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v), (x, y) \odot (u, v) = (xu + 2yv, xv + yu)$ [těleso]
 e) $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, (x, y) \oplus (u, v) = (x + u, y + v), (x, y) \odot (u, v) = (xu + yv, xv + yu + yv)$ [těleso]

11.* Nalezněte invertibilní prvky okruhu $(\{a + b \cdot \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$

$$[1, -1, 1 - \xi, -1 + \xi, \xi, -\xi, \text{kde } \xi = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}]$$

12.* Pro prvky z příkladu 6 najděte nejmenší podtěleso tělesa $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ obsahující daný prvek.

Homomorfismy okruhů

13. Rozhodněte, zda zobrazení $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je homomorfismus okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ do okruhu $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, je-li pro $a, b \in \mathbb{R}$ dáno:

- a) $f(a + bi) = a + b$, [Ne]
 b) $f(a + bi) = a^2 + b^2$, [Ne]
 c) $f(a + bi) = a - bi$. [Ano]

14.* Určete, zda je okruh $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot) \times (\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ oborem integrity. Je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$?

15. Dokažte, že okruh $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot)$ z příkladu 10 b) je izomorfní s okruhem $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

16. Určete všechny čtveřice $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ takové, že předpis $\alpha(r + si) = (ar + bs) + (cr + ds)i$, pro $r, s \in \mathbb{R}$, definuje homomorfismus $\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ okruhu \mathbb{C} do sebe. Pro které z nich se jedná o izomorfismus?

17.* Buď $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ podokruh okruhu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Ukažte, že $(\mathbb{Q}(\sqrt{3}), +, \cdot)$ je těleso. Dokažte, že libovolný okruhový homomorfismus $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{C}$ je identický na množině racionálních čísel, tj. $\forall r \in \mathbb{Q} : \alpha(r) = r$. Popište všechny okruhové homomorfismy $\alpha : \mathbb{Q}(\sqrt{3}) \rightarrow \mathbb{C}$. Které z nich jsou izomorfismy?

2 Polynomy

Dělení v okruzích polynomů

18. V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy

- a) $(x^5 + x^3 - 2x + 1) : (-x^3 + x + 1)$, [podíl: $-x^2 - 2$, zbytek: $x^2 + 3$]
 b) $(3x^3 + 10x^2 + 2x - 3) : (5x^2 + 25x + 30)$, [podíl: $\frac{3}{5}x - 1$, zbytek: $9x + 27$]
 c) $(12x^4 + 3x^3 - 4x + 3) : (2x^2 - 1)$, [podíl: $6x^2 + \frac{3}{2}x + 3$, zbytek: $-\frac{5}{2}x + 6$]
 d) $(x^6 + x^4 + x^2 + 1) : (x^2 - x + 1)$. [podíl: $x^4 + x^3 + x^2$, zbytek: 1]

19. V $\mathbb{Q}[x]$ dělte se zbytkem polynomy:

- a) $(2x^3 + 3x^2 - 4x + 5) : (x - 2)$, [podíl: $2x^2 + 7x + 10$, zbytek: 25]
 b) $(4x^4 - 3x^2 - x + 2) : (3x + 1)$. [podíl: $\frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{9}x^2 - \frac{23}{27}x - \frac{4}{81}$, zbytek: $\frac{166}{81}$]

Kořeny polynomů

20. Uvažme polynom $f(x) = x^6 - 6x^5 + 9x^4 + 8x^3 - 24x^2 + 16 \in \mathbb{Q}[x]$. Dokažte, že $c = 2$ je kořenem polynomu f a určete jeho násobnost n .

$$[n = 4]$$

21. Určete hodnotu koeficientu $a \in \mathbb{Q}$ tak, aby polynom $f = x^5 - ax^2 - ax + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ měl dvojnásobný kořen $c = -1$.

$$[a = -5]$$

22. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $c = 1$ dvojnásobným kořenem polynomu $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 \in \mathbb{Z}[x]$.

Taylorův rozvoj polynomu

23. Vyjádřete polynom $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ v mocninách lineárního polynomu $x + 1$.

$$[f(x) = (x + 1)^4 - 2(x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 4(x + 1) + 1]$$

24. Vyjádřete polynom $f(x) = (x - 2)^4 + 4(x - 2)^3 + 6(x - 2)^2 + 10(x - 2) + 20$ bez počítání jednotlivých mocnin polynomu $x - 2$.

$$[f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x + 8]$$

Racionální kořeny polynomů

25. Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu v $\mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost.

a) $12x^6 + 8x^5 - 85x^4 + 15x^3 + 55x^2 + x - 6$

$$[1, 2, -3, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$$

b) $4x^7 - 16x^6 + x^5 + 55x^4 - 35x^3 - 38x^2 + 12x + 8$

$$[2, 2, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$$

c) $4x^7 - 23x^5 + 17x^4 + 31x^3 - 49x^2 + 24x - 4$

$$[1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2, -2]$$

d) $2x^7 - 3x^6 - 20x^5 - x^4 + 66x^3 + 91x^2 + 48x + 9$

$$[3, 3, -\frac{1}{2}, -1, -1, -1, -1]$$

e) $4x^5 + 8x^4 - 27x^3 - 79x^2 - 56x - 12$

$$[3, -2, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$$

f) $4x^5 - 35x^3 + 15x^2 + 40x + 12$

$$[-3, 2, 2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$$

g) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

$$[-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 1]$$

h) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$

$$[-\frac{2}{5}]$$

i) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$

$$[-\frac{2}{3}, \frac{1}{4}]$$

j) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$

$$[0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$$

k) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$

$$[-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$$

l) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$

$$[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3]$$

m) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$

$$[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$$

n) $2x^7 - 3x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 10x^3 + x^2 + 4x + 4$

$$[2, 2, -1, -1, -1]$$

o) $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 1$

$$[-1, -1]$$

p) $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 5x + 2$

$$[-1, 1, 1, 1, 2]$$

q) $f = 12x^7 - 56x^6 + 115x^5 - 141x^4 + 103x^3 - 35x^2 - 3x + 9$ [$-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$]
 r) $g = 8x^7 - 44x^6 + 70x^5 - 17x^4 - 24x^3 + 10x^2 + 2x - 1$ [$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$]

26. Určete takové $a \in \mathbb{C}$, pro něž má polynom $f = 2x^6 - x^5 - 11x^4 - x^3 + ax^2 + 2ax + 8 \in \mathbb{C}[x]$ kořen 2. Pro toto a určete všechny racionální kořeny polynomu f včetně násobností.

[$a = 10$; kořeny: $2, 2, -2, -\frac{1}{2}$]

27. Určete všechna $a \in \mathbb{Z}$, pro něž má polynom $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax - 4$ racionální kořen. [$a \in \{-83, -8, 4, 19\}$]

Rozklad polynomů

28. Napište rozklad polynomu na součin ireducibilních faktorů postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $x^3 - \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$ [$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C} : (x + \frac{2}{3})(x - \frac{1}{2})(x - 1)$]

b) $5x^3 - 8x^2 + 11x + 6$ [$\mathbb{Q}, \mathbb{R} : 5(x + \frac{2}{5})(x^2 - 2x + 3)$]
[$\mathbb{C} : 5(x + \frac{2}{5})(x - 1 - i\sqrt{2})(x - 1 + i\sqrt{2})$]

c) $12x^4 - 7x^3 - 19x^2 - 3x + 2$ [$\mathbb{Q} : 12(x + \frac{2}{3})(x - \frac{1}{4})(x^2 - x - 1)$]
[$\mathbb{R}, \mathbb{C} : 12(x + \frac{2}{3})(x - \frac{1}{4})(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})$]

d) $3x^5 - x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$ [$\mathbb{Q}, \mathbb{R} : 3x(x - \frac{2}{3})^2(x^2 + x + 1)$]
[$\mathbb{C} : 3x(x - \frac{2}{3})^2(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})$]

e) $6x^4 + x^3 + x^2 - 16x - 12$ [$\mathbb{Q}, \mathbb{R} : 6(x + \frac{2}{3})(x - \frac{3}{2})(x^2 + x + 2)$]
[$\mathbb{C} : 6(x + \frac{2}{3})(x - \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2})(x + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2})$]

f) $4x^6 - 12x^5 + 9x^4 - 12x^2 + 36x - 27$ [$\mathbb{Q} : 4(x - \frac{3}{2})^2(x^4 - 3)$]
[$\mathbb{R} : 4(x - \frac{3}{2})^2(x + \sqrt[4]{3})(x - \sqrt[4]{3})(x^2 + \sqrt{3})$]
[$\mathbb{C} : 4(x - \frac{3}{2})^2(x + \sqrt[4]{3})(x - \sqrt[4]{3})(x - i\sqrt[4]{3})(x + i\sqrt[4]{3})$]

g) $9x^6 - 21x^5 - 17x^4 + 15x^3 - 42x^2 - 34x - 6$ [$\mathbb{Q} : (3x + 1)^2(x - 3)(x^3 + 2)$]
[$\mathbb{R} : (3x + 1)^2(x - 3)(x + \sqrt[3]{2})(x^2 - \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$]
[$\mathbb{C} : (3x + 1)^2(x - 3)(x + \sqrt[3]{2})(x - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2})(x - \frac{\sqrt[3]{2}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2})$]

29. Napište rozklady na součin ireducibilních polynomů postupně nad $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ těch polynomů z Příkladu 25, u kterých znáte dostatek racionálních kořenů.

30. Určete všechny kořeny polynomu f , víte-li, že má tři kořeny racionální. Rozložte f na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $f(x) = 4x^5 - 4x^4 - 5x^3 - 7x^2 + x + 2 \in \mathbb{C}[x]$, [$2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$]
[$\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - 2)(2x - 1)(2x + 1)(x^2 + x + 1)$]
[$\mathbb{C} : (x - 2)(2x - 1)(2x + 1)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$]

b) $f(x) = 4x^5 - 12x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 3x + 4 \in \mathbb{C}[x]$. [$4, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$]
[$\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - 4)(2x - 1)(2x + 1)(x^2 + x + 1)$]
[$\mathbb{C} : (x - 4)(2x - 1)(2x + 1)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$]

Komplexně sdružené kořeny

31. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^7 - 4x^6 + 8x^5 - 7x^4 + 8x^2 - 8x + 4 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $1 + i$. Rozložte tento polynom na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} & [1 + i, 1 + i, 1 - i, 1 - i, -1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i] \\ & [\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - 2x + 2)^2] \\ & [\mathbb{C} : (x + 1)(x - 1 + i)^2(x - 1 - i)^2(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)] \end{aligned}$$

32. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají jednoduchý kořen $-\frac{1}{3}$ a dvojnásobný kořen $3 + 2i$, nalezněte polynom nejmenšího stupně. Rozložte tento polynom na ireducibilní polynomy nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} & [x^5 - \frac{35}{3}x^4 + 58x^3 - \frac{406}{3}x^2 + 117x + \frac{169}{3}] \\ & [\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x + \frac{1}{3})(x^2 - 6x + 13)^2] \\ & [\mathbb{C} : (x + \frac{1}{3})(x - 3 + 2i)^2(x - 3 - 2i)^2] \end{aligned}$$

33. Určete všechny kořeny polynomu $f = x^6 - 7x^5 + 20x^4 - 30x^3 + 37x^2 - 55x + 50 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $2 - i$. Rozložte jej na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} & [2 - i, 2 - i, 2 + i, 2 + i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i] \\ & [\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x^2 - 4x + 5)^2(x^2 + x + 2)] \\ & [\mathbb{C} : (x - 2 + i)^2(x - 2 - i)^2(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i)] \end{aligned}$$

34. Mezi všemi normovanými polynomy s reálnými koeficienty, které mají dvojnásobný kořen $\frac{1}{2}$ a dvojnásobný kořen k nalezněte polynom nejmenšího stupně. Zapište rozklad tohoto polynomu na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$:

a) $k = 1 - i$,

$$\begin{aligned} & [x^6 - 5x^5 + \frac{49}{4}x^4 - 17x^3 + 14x^2 - 6x + 1] \\ & [\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - \frac{1}{2})^2(x^2 - 2x + 2)^2] \\ & [\mathbb{C} : (x - \frac{1}{2})^2(x - 1 + i)^2(x - 1 - i)^2] \end{aligned}$$

b) $k = 1 - 2i$.

$$\begin{aligned} & [x^6 - 5x^5 + \frac{73}{4}x^4 - 35x^3 + \frac{97}{2}x^2 - 30x + \frac{25}{4}] \\ & [\mathbb{Q}, \mathbb{R} : (x - \frac{1}{2})^2(x^2 - 2x + 5)^2] \\ & [(x - \frac{1}{2})^2(x - 1 + 2i)^2(x - 1 - 2i)^2] \end{aligned}$$

35. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^4 + 4x^2 + x + 6 \in \mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost, víte-li, že jedním z kořenů je číslo $\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$.

$$[\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}, \frac{1+i\sqrt{11}}{2}, \frac{1-i\sqrt{11}}{2}]$$

36. Víme, že polynom $f = 4x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1 \in \mathbb{C}[x]$ má dvojnásobný kořen $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Určete zbývající kořeny polynomu f .

$$[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i]$$

37. Uveďte příklad polynomu v $\mathbb{R}[x]$, resp. v $\mathbb{Z}[x]$, jehož kořenem je

a) $1 + i$,

$$[\mathbb{R}[x], \mathbb{Z}[x] : x^2 - 2x + 2]$$

b) $2 + \sqrt{3}i$,

$$[\mathbb{R}[x], \mathbb{Z}[x] : x^2 - 4x + 27]$$

c) $\sqrt{3} - 5i$.

$$[\mathbb{R}[x], \mathbb{Z}[x] : x^4 + 44x^2 + 784; \mathbb{R}[x] : x^2 - 2\sqrt{3}x + 28]$$

Polynomy nad \mathbb{Z}_p

38. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^5 + 5x^4 - x^2 - x + 3$ v \mathbb{Z}_7 .

$$[[1]_7, [5]_7, [5]_7, [6]_7, [6]_7]$$

39. Určete všechny ireducibilní polynomy nad

a) \mathbb{Z}_2 stupně menšího než 5, $[x, x+1, x^2+x+1, x^3+x+1, x^3+x^2+1, x^4+x+1, x^4+x^3+1, x^4+x^3+x^2+x+1]$

b) \mathbb{Z}_3 stupně menšího než 4, $[x, x+1, x+2, 2x, 2x+1, 2x+2, x^2+1, 2x^2+2, x^2+x+2, x^2+2x+2, 2x^2+x+1, 2x^2+2x+1, x^3+2x+1, 2x^3+x+2, x^3+2x+2, 2x^3+x+1, x^3+x^2+2, 2x^3+2x^2+1, x^3+2x^2+1, 2x^3+x^2+2, x^3+x^2+x+2, 2x^3+2x^2+2x+1, x^3+x^2+2x+1, 2x^3+2x^2+x+2, x^3+2x^2+x+1, 2x^3+x^2+2x+2, x^3+2x^2+2x+2, 2x^3+x^2+x+1]$

40. Nalezněte všechny kořeny polynomu $x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ v $\mathbb{Z}_3[x]$ a určete jejich násobnost.
 $[[-1]_3, [-1]_3, [-1]_3, [-1]_3, [1]_3, [1]_3]$

41. Určete nějaký prvek $a \in \mathbb{Z}_5$ takový, že polynom $x^3 + x^2 + ax + 1$ je ireducibilní nad \mathbb{Z}_5 .
 $[a \in \{[0]_5, [3]_5, [4]_5\}]$

42. Určete všechny prvky $a \in \mathbb{Z}_7$, pro které je polynom $x^3 + x^2 + x + a$ ireducibilní nad \mathbb{Z}_7 .
 $[a \in \{[2]_7, [5]_7\}]$

43. Udejte příklad polynomu

a) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 5, má dvojnásobný kořen 2 a žádné jiné kořeny nemá, $[x^3 + x^2 + x + 3]$
 b) $g \in \mathbb{Z}_2[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen, $[x^5 + x^4 + 1]$
 c) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 4, není ireducibilní a nemá žádný kořen, $[x^4 + 2x^2 + 1]$
 d) $g \in \mathbb{Z}_3[x]$, který je stupně 5, není ireducibilní a nemá žádný kořen, $[x^5 + x^4 + 2x^3 + x + 2]$
 e) $g \in \mathbb{Z}_5[x]$, který je stupně 6, má dvojnásobný kořen 2, jednoduchý kořen 4 a který nemá žádné další kořeny. $[x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + x - 1]$

44. Rozložte polynomy na ireducibilní faktory.

a) $x^6 + x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ $[(x^3 + x^2 + 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)]$
 b) $x^7 + 3x^6 + 2x^5 - x^4 + 3x^3 - x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ $[(x + 1)^2(x + 2)^3(x^2 + 2)]$
 c) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ $[(x + 1)(x^2 + x + 1)^2]$
 d) $x^7 - x^6 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ $[(x + 2)(x + 1)^2(x^2 + 2)(x^2 + 3)]$
 e*) $x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$ $[(x - 1)(x^2 - x - 1)(x^2 + 1)]$
 f) $x^4 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ $[(x^2 + x + 1)(x + 1)^2]$
 g*) $x^5 + 3x^3 + x + 3 \in \mathbb{Z}_5[x]$ $[(x + 2)(x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 4)]$
 h) $x^5 + x^3 + 2x^2 + 2$ $[(x + 2)(x^2 + x + 4)(x^2 + 2x + 4)]$

Eisensteinovo kritérium *

45. Ukažte, že polynom $f(x)$ je ireducibilní nad \mathbb{Q} :

a) $f(x) = x^n + p$; $n \in \mathbb{N}$, p je prvočíslo,

$[plyne z E. k. volbou prvočísla p]$

b) $f(x) = x^6 + x^3 + 1$.

$[f(x) = (x - 1)^6 + 6(x - 1)^5 + 15(x - 1)^4 + 21(x - 1)^3 + 18(x - 1)^2 + 9(x - 1) + 3]$
 $[plyne z E. k. volbou prvočísla p = 3]$

46. Najděte $n \in \mathbb{N}$ takové, že polynom $x^2 - n$ je ireducibilní nad \mathbb{Q} , ale nesplňuje podmínku Eisensteinova kritéria.

$[n = 8]$

47. Najděte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby polynom $p(x) = x^n + n$

a) byl ireducibilní nad \mathbb{Q} ,

$[n = 2]$

b) nebyl ireducibilní nad \mathbb{Q} .

$[n = 4 : p(x) = x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2), n = 27 : p(x) = x^{27} + 27 = (x^9 + 3)(x^{18} - 3x^9 + 9)]$

48. Určete, který z polynomů $f(x) = x^5 + 3x^3 - 9x + 3 \in \mathbb{Z}[x]$ a $g(x) = x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 3 \in \mathbb{Z}[x]$ je ireducibilní nad \mathbb{Z} a který lze nad \mathbb{Z} rozložit na součin polynomů nižšího stupně. Napište rozklady polynomů f a g na ireducibilní faktory nad \mathbb{Z} .

$[f \text{ je ireducibilní: } f(x) = x^5 + 3x^3 - 9x + 3, \text{ plyne z E. k. pro } p = 3]$
 $[g \text{ není ireducibilní: } g(x) = (x^2 + x - 1)(x^2 + 3x + 3)]$

Euklidův algoritmus, Bezoutova rovnost

49. Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, které jsou stupně 3, každý z nich má alespoň jeden alespoň dvojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je:

a) $x^2 + x - 6$,

$$[f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x - 2)^2(x + 3); g(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18 = (x - 2)(x + 3)^2]$$

b) $x^2 + x - 2$,

$$[f(x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2); g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x + 2)^2]$$

c) $x^2 + 2x - 3$.

$$[f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 = (x - 1)^2(x + 3); g(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x - 1)(x + 3)^2]$$

Vyjádřete největší společný dělitel polynomů f, g Bezoutovou rovností.

$$[x^2 + x - 6 = f(-\frac{1}{5}) + g\frac{1}{5}; x^2 + x - 2 = f(-\frac{1}{3}) + g\frac{1}{3}; x^2 + 2x - 3 = f(-\frac{1}{4}) + g\frac{1}{4}]$$

50. Nalezněte polynomy $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$, které jsou stupně 4, každý z nich má alespoň jeden alespoň trojnásobný kořen a jejich největší společný dělitel je:

a) $x^2 + x - 2$, $[f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x - 1)^3(x + 3); g(x) = x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 4x - 8 = (x - 1)(x + 3)^3]$

b) $x^2 + 2x - 3$, $[f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x - 1)^3(x + 2); g(x) = x^4 + 8x^3 + 18x - 27 = (x - 1)(x + 2)^3]$

c) $x^2 - 2x - 3$. $[f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27 = (x - 3)^3(x + 1); g(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3 = (x - 3)(x + 1)^3]$

Vyjádřete největší společný dělitel polynomů f, g Bezoutovou rovností.

$$[x^2 + x - 2 = f(\frac{2}{27}x + \frac{7}{27}) + g(-\frac{2}{27}x + \frac{5}{27}); x^2 + 2x - 3 = f(\frac{1}{32}x + \frac{5}{32}) + g(-\frac{1}{32}x + \frac{3}{32}); x^2 - 2x - 3 = f(\frac{1}{32}x + \frac{3}{32}) + g(-\frac{1}{32}x + \frac{5}{32})]$$

51. Pro dané dvojice polynomů $f, g \in \mathbb{R}[x]$ najděte normovaný polynom, který je jejich největším společným dělitelem. Najděte koeficienty do příslušné Bezoutovy rovnosti.

a) $f = x^4 + 1, g = x^3 - 1$

$$[(f, g) = 1 = f(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) + g(-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})]$$

b) $f = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, g = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$

$$[(f, g) = x + 3 = f(\frac{3}{5}x - 1) + g(-\frac{x^2}{5} + \frac{2}{5}x)]$$

c) $f = x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x - 3, g = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 3$

$$[(f, g) = x^2 - 3x - 1 = f(\frac{5}{9}x + \frac{11}{9}) + g(-\frac{5}{9}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{8}{9})]$$

Násobné kořeny *

52. Nalezněte všechny aspoň dvojnásobné kořeny polynomu:

a) $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 12x^2 - 4$,

$$[-1 + i, -1 - i]$$

b) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1$,

$$[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}]$$

c) $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$.

$$[\frac{-3+\sqrt{13}}{2}, \frac{-3-\sqrt{13}}{2}]$$

53. Rozložte v $\mathbb{C}[x]$ na lineární faktory polynom

a) $x^4 + 2ix^3 + x^2 + 2ix + 1$, víte-li, že má dvojnásobný kořen,

$$[(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})^2(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})^2]$$

b) $x^4 + 6x^2 - 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.

$$[(x - i)^3(x + 3i)]$$

c) $x^4 - 4x^2 + 16x + 32$, víte-li, že má alespoň jeden kořen vícenásobný.

$$[(x + 2)^2(x - 2 + 2i)(x - 2 - 2i)]$$

d) $x^5 + 10x^3 - 20ix^2 - 15x + 4i$, víte-li, že má čtyřnásobný kořen.

$$[(x - i)^4(x + 4i)]$$

e) $x^3 - 6ix + 4 - 4i$, víte-li, že má dvojnásobný kořen.

$$[(x + 1 + i)^2(x - 2 - 2i)]$$

f) $x^4 + 6x^2 + 8ix - 3$, víte-li, že má trojnásobný kořen.

$$[(x + i)^3(x - 3i)]$$

Rozklad racionální lomené funkce na součet parciálních zlomků

54. Rozložte racionální lomenou funkci na součet parciálních zlomků nad \mathbb{Q} .

- a) $\frac{x^2-x+1}{x^6+2x^4+x^2}$ $[\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}]$
- b) $\frac{x^3-4x^2-4x-2}{x^6-2x^3+1}$ $[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}]$
- c) $\frac{3x^4+3x^2-7x-7}{x^5-3x^4+4x^3-12x^2+4x-12}$ $[\frac{2}{x-3} + \frac{x+3}{x^2+2} + \frac{2x-1}{(x^2+2)^2}]$
- d) $\frac{x^4+x^2-1}{x^6-10x^3+25}$ $[\frac{x}{x^3-5} + \frac{x^2+5x-1}{(x^3-5)^2}]$
- e) $\frac{x^5-x^4-x^3+x^2+x-1}{x^6-6x^4+12x^2-8}$ $[\frac{x-1}{x^2-2} + \frac{3x-3}{(x^2-2)^2} + \frac{3x-3}{(x^2-2)^3}]$
- f) $\frac{4x^4+2x^3+15x^2+7}{x^5-2x^4+6x^3-12x^2+9x-18}$ $[\frac{3}{x-2} + \frac{x+4}{x^2+3} + \frac{2x-2}{(x^2+3)^2}]$
- g) $\frac{8x^3-9x^2-18x+22}{4x^4-16x^3+25x^2-21x+9}$ $[\frac{2}{2x-3} + \frac{1}{(2x-3)^2} + \frac{x+3}{x^2-x+1}]$
- h) $\frac{21x^3-16x^2-12x+1}{9x^4-3x^3+13x^2+11x+2}$ $[\frac{1}{3x+1} + \frac{1}{(3x+1)^2} + \frac{2x-3}{x^2-x+2}]$
- i) $\frac{3x^4+2x^3-17x^2-7x-7}{2x^5-7x^4+6x^3-3x^2+4x+4}$ $[\frac{-1}{2x+1} + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{x-1}{x^2+1}]$
- j) $\frac{8x^4+2x^3+3x^2+3x+6}{3x^5+5x^4+7x^3+9x^2+2x-2}$ $[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{2}{3x-1} + \frac{x-2}{x^2+2}]$
- k) $\frac{5x^3+7x^2-6x-10}{x^5+4x^4+2x^3-4x^2+8x+16}$ $[\frac{-1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+2)^3} + \frac{x-1}{x^2-2x+2}]$
- l) $\frac{x^3-2x^2-x+16}{x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8}$ $[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{(x-2)^3} - \frac{x+1}{x^2+x+1}]$