1. VÝPOČET DETERMINANTU

Teorie

1.1. Definice. Nechť $M = \{1, 2, \dots, n\}$ je konečná množina o n prvcích. Pak bijektivní zobrazení σ množiny M na sebe se nazývá *permutace množiny* M.

1.2. Definice. Nechť $\sigma = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ je libovolná permutace, řekneme, že dvojice r_i, r_j je *inverze* v permutaci σ, jestliže $i < j$ a $r_i > r_j$.
Znaménko permutace σ, je číslo $sign\,\sigma = (-1)^k$, kde k je počet inverzí v permutaci σ.

1.3. Definice. Nechť $\sigma = (r_1, \dots, r_n)$, $\tau = (s_1, \dots, s_n)$ jsou dvě permutace, nechť existují indexy $i \neq j$ tak, že $s_i = r_j$, $s_j = r_i$ a dále $r_k = s_k$ pro $k \neq i, j$. Potom řekneme, že permutace τ vznikla z permutace σ provedením jedné *transpozice.*

1.4. Věta. *Provedení jedné transpozice změní paritu dané permutace.*

1.5. Definice. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad polem K. Pak *determinant matice* A, je číslo z pole K, označené $\det A$ (resp. $|A|$) a definované vztahem

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)} \,,$$

kde σ je libovolná permutace z množiny všech permutací n-prvkové množiny $M = \{1, 2, \dots, n\}$ označené S_n. Suma je tedy přes všechna $\sigma \in S_n$, tj. přes všechny permutace množiny M. Součin $\operatorname{sign} \sigma \, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$ se nazývá *člen determinamtu.*

1.6. Věta. *Nechť matice B vznikne z matice A*

1. *záměnou dvou různých řádků, pak* $\det B = -\det A$
2. *vynásobením jednoho řádku číslem $t \in K$, pak* $\det B = t \det A$

1.7. Věta. *Hodnota determinantu matice A se nezmění, jestliže*

1. *k jednomu řádku matice A přičteme libovolný násobek jiného řádku*
2. *k jednomu řádku matice A přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků*
3. *jeden řádek matice A ponecháme beze změny a k ostatním řádkům přičteme jeho libovolné násobky*

1.8. Definice. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n; nechť je zvoleno k jejích řádků a sloupců $k < n$ a $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n, 1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$. Pak matice

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

se nazývá *submatice matice* A určená řádky $i_1, \dots, i_k$ a sloupci $j_1, \dots, j_k$. Její determinant $\det M$ se nazývá *minor řádu* k matice A.
Zbývajícími $(n-k)$ řádky a $(n-k)$ sloupci je určena tzv. *doplňková submatice* $\overline{M}$ k submatici M a její determinant $\det \overline{M}$ se nazývá *doplněk minoru* $\det M$.
Označme $s_M = i_1 + i_2 + \dots + i_k + j_1 + j_2 + \dots + j_k$. Pak číslo $(-1)^{s_M} \det \overline{M}$ se nazývá *algebraický doplněk* minoru $\det M$.

1.9. Věta. *(Laplaceova věta) Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n, nechť je pevně zvoleno k řádků matice A, kde $0 < k < n$. Pak determinant matice A je roven součtu všech $\binom{n}{k}$ součinů minorů řádu k, vybraných ze zvolených k řádků, s jejich algebraickými doplňky.*

Řešené příklady

Úloha 1: Spočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) převedením na schodovitý tvar pomocí elementárních úprav, které nemění hodnotu determinantu
(b) užitím Laplaceovy věty

Řešení: (a) Převedeme na schodovitý tvar. Nejprve ke třetímu řádku přičteme -1 násobek prvního řádku a ke čtvrtému řádku přičteme -2 násobek prvního řádku. Pak ke čtvrtému řádku přičteme $\frac{3}{2}$ násobek druhého řádku.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

Nyní přičteme ke čtvrtému řádku 5 násobek třetího řádku, čímž dostáváme schodovitý tvar a determinant se rovná součinu prvků na hlavní diagonále.

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1\, 2\, (-1)\, (-\frac{1}{2}) = 1$$

(b) Uděláme Laplaceův rozvoj podle prvního řádku:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{4+1}\, 1 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(-9 - 3 - 2) - (-9 - 4 - 2) = 1$$

Úloha 2: Rozvojem podle více řádků určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Vybereme si první a druhý řádek, protože tyto řádky obsahují nejvíce nul. V rozvoji pak musíme postupně procházet všechny dvojice sloupců. Vidíme, že všechny členy determinantu kromě druhého jsou nulové a výpočet se tedy velmi zjednoduší.

$$\det(A) = (-1)^{1+2+1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+1+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+1+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+2+3}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+2+3+4} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^7 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)\,(-1-6)\,(-2+1) = -7$$

Úloha 3: Spočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n+1 & 0 \end{pmatrix}$$

řádu n.

Řešení: Ke všem řádkům přičteme první řádek

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n+1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 2.3 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} = n!$$

Úloha 4: Odvoďte rekurentní vztah pro výpočet determinantu matice

$$A_n = \begin{pmatrix} x+y & xy & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{pmatrix}$$

řádu n.

Řešení: Uděláme Laplaceův rozvoj podle prvního sloupce

$$\det A_n = (x+y)\det \begin{pmatrix} x+y & xy & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} xy & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{pmatrix}.$$

První matice je vlastně shodná s původní maticí, pouze je o řád menší. U druhé matice provedeme Laplaceův rozvoj podle prvního řádku. Pak dostáváme

$$\det A_n = (x+y)\,\det A_{n-1} - xy\det A_{n-2}\,.$$

Úloha 5: Určete determinant matice řádu n (tzv. Vandermondův determinant).

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Řešení: Od každého sloupce, kromě prvního, odečteme x_1 násobek předchozího sloupce. Budeme postupovat od posledního sloupce až ke druhému.

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1x_2 & \dots & x_2^{n-2}-x_1x_2^{n-3} & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1x_n & \dots & x_n^{n-2}-x_1x_n^{n-3} & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Nyní uděláme Laplaceův rozvoj podle prvního řádku a jednotlivé prvky determinantu upravíme vytýkáním.

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = \det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \dots & x_2^{n-3}(x_2-x_1) & x_2^{n-2}(x_2-x_1) \\ x_3-x_1 & x_3(x_3-x_1) & \dots & x_3^{n-3}(x_3-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & \dots & x_n^{n-3}(x_n-x_1) & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{pmatrix}$$

Vytknemeli z každého řádku, zůstane nám determinant, který je Vandermondův determinant řádu $n-1$ s parametry $x_2,\dots,x_n$.

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = (x_2-x_1)\,(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\,\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-3} & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

A tedy

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)\,(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)\,V_{n-1}(x_2, \dots, x_n)$$

Tím jsme získali rekurentní formuli, která platí pro $n > 1$. Indukcí teď snadno nahlédneme výsledné řešení.

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)\,(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)\,(x_3 - x_2)\dots(x_n - x_2)\dots\dots(x_n - x_{n-1})$$

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

Cvičení

1. Spočtěte počet inverzí v dané permutaci:
   - (a) $(2, 1, 7, 9, 8, 6, 5, 3, 4)$
   - (b) $(9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$
2. Určete paritu následujících permutací:
   - (a) $(4, 6, 1, 5, 3, 2)$
   - (b) $(6, 3, 1, 2, 4, 5)$
   - (c) $(3, 7, 6, 2, 4, 1, 5)$
   - (d) $(4, 1, 3, 7, 2, 5, 6)$
3. Určete x, y tak, aby pořadí
   - (a) $(1, 2, 7, 4, x, 5, 6, y, 9)$ bylo sudé.
   - (b) $(5, 1, y, 8, 9, 4, x, 6, 3)$ bylo liché.
4. Zjistěte paritu následujících permutací.
   - (a) $(n, n-1, \dots, 2, 1)$
   - (b) $(1, 3, 5, \dots, 2n-3, 2n-1, 2, 4, \dots, 2n)$
   - (c) $(2, 4, 6, \dots, 2(n-1), 2n, 1, 3, \dots, 2n-1)$
   - (d) $(2, 5, 8, \dots, 3n-1, 1, 4, 7, \dots, 3n-2, 3, 6, 9, \dots, 3n)$
   - (e) $(2, 1, 4, 3, \dots, 2n, 2n-1)$
5. Rozhodněte, zda se daný součin vyskytuje v determinantu matice A řádu n.
   - (a) $n = 6$, $a_{31}\,a_{43}\,a_{14}\,a_{52}\,a_{66}\,a_{25}$

(b) $n = 8$, $a_{72}\, a_{17}\, a_{43}\, a_{21}\, a_{64}\, a_{35}\, a_{56}$

6. Určete všechny členy determinantu matice A řádu 4, které obsahují prvky a_{12}, a_{34}.

7. Spočtěte determinant matice podle definice.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & i \end{pmatrix}$$

8. Spočtěte determinant úpravou na schodovitý tvar.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -3 & -7 \\ -3 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & -4 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

9. Spočtěte determinant matice pouze užitím Laplaceovy věty a definice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Spočtěte determinant řádu $n > 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ x & a & x & \dots & x & x \\ x & x & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{pmatrix}$$

11. Spočtěte determinant matice řádu $n > 1$ úpravou na schodovitý tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & a-1 & a \\ -1 & 0 & 3 & \dots & a-1 & a \\ -1 & -2 & 0 & \dots & a-1 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{2(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{pmatrix}$$

12. Odvoďte rekurentní vztah pro výpočet determinantu matice.

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} \qquad B_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_n = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E_n = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad F_n = \begin{pmatrix} x+1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+1 \end{pmatrix}$$

$$G_{2n} = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 & y \\ 0 & x & \dots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & y & \dots & x & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix} \qquad H_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Řešte rovnici:

(a) $\det \begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ 2-x & 5 \end{pmatrix} = 3$ (b) $\det \begin{pmatrix} \sin x & -3\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} = 2\sin^2 - \frac{x}{2}$

14. Spočtěte determinant (užijte postupu z úlohy 5).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 8 & 1 & -8 & 27 & -1 \\ 16 & 1 & 16 & 81 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 + 1 & x_2 + 1 & \dots & x_n + 1 \\ x_1^2 + x_1 & x_2^2 + x_2 & \dots & x_n^2 + x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} + x_1^{n-2} & x_2^{n-1} + x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

15. Laplaceovým rozvojem podle třetího sloupce spočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

16. Vyjádřete polynom stupně n pomocí determinantu stupně $n-1$. (Využijte výsledku předchozího příkladu.)