

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[3]{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}))^n \in \mathbb{Z}. \quad n = 21$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^3 = -2$.

$$x = \sqrt[3]{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha), \text{ kde } \alpha \in \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad \mathbb{Z}_2 stupně 3: např. $x^3 + x^2 + 1$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad \mathbb{R} , jenž má kořen $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$: např. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 5$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^2 - 2)^2 \cdot (x^3 + 1)$ na ireducibilní faktory nad okruhy \mathbb{Q} , \mathbb{R} a \mathbb{C} .

$$\text{Rozklad nad } \mathbb{Q} : f = (x^2 - 2)^2(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$\mathbb{R} : f = (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$\mathbb{C} : f = (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2(x + 1)(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^4 - x^3 + ax + 3$ má racionální kořen:

$$a = -3, 5, -19, 37$$

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[3]{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}))^n \in \mathbb{N}. \quad n = 42$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^4 = -2$.

$$x = \sqrt[4]{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha), \text{ kde } \alpha \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad \mathbb{Z}_2 stupně 3: např. $x^3 + x^2 + 1$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad \mathbb{R} , jenž má kořen $\sqrt{3} + i\sqrt{2}$: např. $x^2 - 2\sqrt{3}x + 5$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^2 - 2)^2 \cdot (x^3 - 1)$ na ireducibilní faktory nad okruhy \mathbb{Q} , \mathbb{R} a \mathbb{C} .

$$\text{Rozklad nad } \mathbb{Q} : f = (x^2 - 2)^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\mathbb{R} : f = (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\mathbb{C} : f = (x - \sqrt{2})^2(x + \sqrt{2})^2(x - 1)(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^4 - x^2 + ax + 3$ má racionální kořen:

$$a = 3, -3, 25, -25$$

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[5]{3} \cdot (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}))^n \in \mathbb{Z}. \quad n = 15$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^2 = -i$.

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad \mathbb{Z}_3 stupně 3: např. $x^3 + x^2 + 2$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad \mathbb{R} , jenž má kořen $\sqrt{3} + i\sqrt{8}$: např. $x^2 - 2\sqrt{3}x + 11$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^2 - 3)^2 \cdot (x^3 + 8)$ na ireducibilní faktory nad okruhy \mathbb{Q} , \mathbb{R} a \mathbb{C} .

$$\text{Rozklad nad } \mathbb{Q} : f = (x^2 - 3)^2(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$\mathbb{R} : f = (x - \sqrt{3})^2(x + \sqrt{3})^2(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$\mathbb{C} : f = (x - \sqrt{3})^2(x + \sqrt{3})^2(x + 2)(x - 1 - i\sqrt{3})(x - 1 + i\sqrt{3})$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^5 + ax^3 + 2$ má racionální kořen:

$$a = -3, 1$$

Matematika II — jaro 2005 — 1. test — sk. M — 21.3.2005

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[5]{3} \cdot (\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}))^n \in \mathbb{N}. \quad n = 30$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^4 = -i$.

$$x = \cos \alpha + i \sin \alpha, \text{ kde } \alpha \in \{ \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8} \}$$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad \mathbb{Z}_3 stupně 3: např. $x^3 + x^2 + 2$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad \mathbb{R} , jenž má kořen $\sqrt{8} + i\sqrt{3}$: např. $x^2 - 4\sqrt{2}x + 11$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^2 - 3)^2 \cdot (x^3 - 8)$ na ireducibilní faktory nad okruhy \mathbb{Q} , \mathbb{R} a \mathbb{C} .

$$\text{Rozklad nad } \mathbb{Q} : f = (x^2 - 3)^2(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$\mathbb{R} : f = (x - \sqrt{3})^2(x + \sqrt{3})^2(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$\mathbb{C} : f = (x - \sqrt{3})^2(x + \sqrt{3})^2(x - 2)(x + 1 + i\sqrt{3})(x + 1 - i\sqrt{3})$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^5 + ax^2 + 2$ má racionální kořen:

$$a = -3, -1.$$

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[7]{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}))^n \in \mathbb{Z}. \quad n = 35$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^3 = 1 + i$.

$$x = \sqrt[6]{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha), \text{ kde } \alpha \in \{\frac{\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\}$$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad \mathbb{Z}_5 stupně 2: např. $x^2 + 2$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad \mathbb{R} , jenž má kořen $\sqrt{2} + i\sqrt{5}$: např. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 7$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^4 - 2x^2) \cdot (x^2 + 3)$ na ireducibilní faktory nad okruhy \mathbb{Q} , \mathbb{R} a \mathbb{C} .

$$\text{Rozklad nad } \mathbb{Q} : f = x^2(x^2 - 2)(x^2 + 3)$$

$$\mathbb{R} : f = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 3)$$

$$\mathbb{C} : f = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^3 + ax^2 + ax - 5$ má racionální kořen:

$$a = 2, -4$$

Matematika II — jaro 2005 — 1. test — sk. Z — 21.3.2005

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[7]{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}))^n \in \mathbb{N}. \quad n = 70$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^2 = 1 + i$.

$$x = \sqrt[4]{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha), \text{ kde } \alpha \in \{\frac{\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\}$$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad \mathbb{Z}_5 stupně 2: např. $x^2 + 2$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad \mathbb{R} , jenž má kořen $\sqrt{5} + i\sqrt{2}$: např. $x^2 - 2\sqrt{5}x + 7$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^4 - 2x^2) \cdot (x^2 + 8)$ na ireducibilní faktory nad okruhy \mathbb{Q} , \mathbb{R} a \mathbb{C} .

$$\text{Rozklad nad } \mathbb{Q} : f = x^2(x^2 - 2)(x^2 + 8)$$

$$\mathbb{R} : f = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 8)$$

$$\mathbb{C} : f = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - i2\sqrt{2})(x + i2\sqrt{2})$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^3 + ax^2 - ax - 5$ má racionální kořen:

$$a = 3, -6$$

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[5]{3} \cdot (\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}))^n \in \mathbb{Z}. \quad n = 45$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^2 = -1 + i$.

$$x = \sqrt[4]{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha), \text{ kde } \alpha \in \{\frac{3\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\}$$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad \mathbb{Z}_7 stupně 2: např. $x^2 + 2$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad \mathbb{R} , jenž má kořen $\sqrt{5} + i\sqrt{3}$: např. $x^2 - 2\sqrt{5}x + 8$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^3 - 3x) \cdot (x^2 + 4)$ na ireducibilní faktory nad okruhy \mathbb{Q} , \mathbb{R} a \mathbb{C} .

$$\text{Rozklad nad } \mathbb{Q} : f = x(x^2 - 3)(x^2 + 4)$$

$$\mathbb{R} : f = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 4)$$

$$\mathbb{C} : f = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - 2i)(x + 2i)$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^4 + ax^2 + ax + 3$ má racionální kořen:

$$a = -2, -7, -14$$

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[5]{3} \cdot (\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}))^n \in \mathbb{N}. \quad n = 90$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^3 = -1 + i$.

$$x = \sqrt[6]{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha), \text{ kde } \alpha \in \{\frac{3\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\}$$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad \mathbb{Z}_7 stupně 2: např. $x^2 + 2$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad \mathbb{R} , jenž má kořen $\sqrt{3} + i\sqrt{5}$: např. $x^2 - 2\sqrt{3}x + 8$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^3 - 3x) \cdot (x^2 + 7)$ na ireducibilní faktory nad okruhy \mathbb{Q} , \mathbb{R} a \mathbb{C} .

$$\text{Rozklad nad } \mathbb{Q} : f = x(x^2 - 3)(x^2 + 7)$$

$$\mathbb{R} : f = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 + 7)$$

$$\mathbb{C} : f = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - i\sqrt{7})(x + i\sqrt{7})$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^4 - ax^2 + ax + 3$ má racionální kořen:

$$a = 2, 7, 14.$$