Matematika II — jaro 2005 — 1. test — sk. B — 21.3.2005

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[3]{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}))^n \in \mathbb{Z}. \qquad n = 21$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^3 = -2$.

$x = \quad \sqrt[3]{2}(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, kde $\alpha \in \{\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}\}$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad $\mathbb{Z}_2$ stupně 3: např. $x^3 + x^2 + 1$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad $\mathbb{R}$, jenž má kořen $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$: např. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 5$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^2-2)^2 \cdot (x^3+1)$ na ireducibilní faktory nad okruhy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Rozklad nad $\mathbb{Q}$: $f = (x^2-2)^2(x+1)(x^2-x+1)$

$\mathbb{R}$: $f = (x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2(x+1)(x^2-x+1)$

$\mathbb{C}$: $f = (x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2(x+1)(x-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^4 - x^3 + ax + 3$ má racionální kořen:

$a = \quad -3,\ 5,\ -19,\ 37$

Matematika II — jaro 2005 — 1. test — sk. B — 21.3.2005

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[3]{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}))^n \in \mathbb{N}. \qquad n = 42$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^4 = -2$.

$x = \quad \sqrt[4]{2}(\cos\alpha + i \sin\alpha)$, kde $\alpha \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad $\mathbb{Z}_2$ stupně 3: např. $x^3 + x^2 + 1$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad $\mathbb{R}$, jenž má kořen $\sqrt{3} + i\sqrt{2}$: např. $x^2 - 2\sqrt{3}x + 5$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^2-2)^2 \cdot (x^3-1)$ na ireducibilní faktory nad okruhy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Rozklad nad $\mathbb{Q}$: $f = (x^2-2)^2(x-1)(x^2+x+1)$

$\mathbb{R}$: $f = (x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2(x-1)(x^2+x+1)$

$\mathbb{C}$: $f = (x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2(x-1)(x+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^4 - x^2 + ax + 3$ má racionální kořen:

$a = \quad 3,\ -3,\ 25,\ -25$

Matematika II — jaro 2005 — 1. test — sk. M — 21.3.2005

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[5]{3}\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}))^n\in\mathbb{Z}. \qquad\qquad n=15$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^2=-i$.

$x = \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad $\mathbb{Z}_3$ stupně 3: např. x^3+x^2+2

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad $\mathbb{R}$, jenž má kořen $\sqrt{3}+i\sqrt{8}$: např. $x^2-2\sqrt{3}x+11$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f=(x^2-3)^2\cdot(x^3+8)$ na ireducibilní faktory nad okruhy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Rozklad nad
$$\begin{array}{lcll}\mathbb{Q} & : & f= & (x^2-3)^2(x+2)(x^2-2x+4)\\ \mathbb{R} & : & f= & (x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3})^2(x+2)(x^2-2x+4)\\ \mathbb{C} & : & f= & (x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3})^2(x+2)(x-1-i\sqrt{3})(x-1+i\sqrt{3})\end{array}$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom x^5+ax^3+2 má racionální kořen:

$a = \quad -3, 1$

Matematika II — jaro 2005 — 1. test — sk. M — 21.3.2005

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[5]{3}\cdot(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}))^n\in\mathbb{N}. \qquad\qquad n=30$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^4=-i$.

$x = \quad \cos\alpha+i\sin\alpha$, kde $\alpha\in\{\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8},\frac{15\pi}{8}\}$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad $\mathbb{Z}_3$ stupně 3: např. x^3+x^2+2

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad $\mathbb{R}$, jenž má kořen $\sqrt{8}+i\sqrt{3}$: např. $x^2-4\sqrt{2}x+11$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f=(x^2-3)^2\cdot(x^3-8)$ na ireducibilní faktory nad okruhy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Rozklad nad
$$\begin{array}{lcll}\mathbb{Q} & : & f= & (x^2-3)^2(x-2)(x^2+2x+4)\\ \mathbb{R} & : & f= & (x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3})^2(x-2)(x^2+2x+4)\\ \mathbb{C} & : & f= & (x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3})^2(x-2)(x+1+i\sqrt{3})(x+1-i\sqrt{3})\end{array}$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom x^5+ax^2+2 má racionální kořen:

$a = \quad -3, -1.$

Matematika II — jaro 2005 — 1. test — sk. Z — 21.3.2005

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[7]{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}))^n \in \mathbb{Z}. \qquad n = 35$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^3 = 1 + i$.

$x = \sqrt[6]{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, kde $\alpha \in \{\frac{\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\}$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad $\mathbb{Z}_5$ stupně 2: např. $x^2 + 2$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad $\mathbb{R}$, jenž má kořen $\sqrt{2} + i\sqrt{5}$: např. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 7$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^4 - 2x^2) \cdot (x^2 + 3)$ na ireducibilní faktory nad okruhy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Rozklad nad
$$\begin{array}{lcll} \mathbb{Q} & : & f = & x^2(x^2-2)(x^2+3) \\ \mathbb{R} & : & f = & x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+3) \\ \mathbb{C} & : & f = & x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3}) \end{array}$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^3 + ax^2 + ax - 5$ má racionální kořen:

$a = 2, -4$

Matematika II — jaro 2005 — 1. test — sk. Z — 21.3.2005

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[7]{2} \cdot (\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}))^n \in \mathbb{N}. \qquad n = 70$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^2 = 1 + i$.

$x = \sqrt[4]{2}(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, kde $\alpha \in \{\frac{\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}\}$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad $\mathbb{Z}_5$ stupně 2: např. $x^2 + 2$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad $\mathbb{R}$, jenž má kořen $\sqrt{5} + i\sqrt{2}$: např. $x^2 - 2\sqrt{5}x + 7$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^4 - 2x^2) \cdot (x^2 + 8)$ na ireducibilní faktory nad okruhy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Rozklad nad
$$\begin{array}{lcll} \mathbb{Q} & : & f = & x^2(x^2-2)(x^2+8) \\ \mathbb{R} & : & f = & x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x^2+8) \\ \mathbb{C} & : & f = & x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-i2\sqrt{2})(x+i2\sqrt{2}) \end{array}$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^3 + ax^2 - ax - 5$ má racionální kořen:

$a = 3, -6$

Matematika II — jaro 2005 — 1. test — sk. Ž — 21.3.2005

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[5]{3} \cdot (\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}))^n \in \mathbb{Z}. \qquad n = 45$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^2 = -1 + i$.

$x = \sqrt[4]{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, kde $\alpha \in \{\frac{3\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}\}$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad $\mathbb{Z}_7$ stupně 2: např. $x^2 + 2$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad $\mathbb{R}$, jenž má kořen $\sqrt{5} + i\sqrt{3}$: např. $x^2 - 2\sqrt{5}x + 8$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^3 - 3x) \cdot (x^2 + 4)$ na ireducibilní faktory nad okruhy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Rozklad nad
$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &: f = x(x^2-3)(x^2+4) \\ \mathbb{R} &: f = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+4) \\ \mathbb{C} &: f = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-2i)(x+2i) \end{aligned}$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^4 + ax^2 + ax + 3$ má racionální kořen:

$a = -2, -7, -14$

Matematika II — jaro 2005 — 1. test — sk. Ž — 21.3.2005

1. (1 bod) Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$(\sqrt[5]{3} \cdot (\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}))^n \in \mathbb{N}. \qquad n = 90$$

2. (1 bod) Najděte všechna komplexní čísla x taková, že $x^3 = -1 + i$.

$x = \sqrt[6]{2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, kde $\alpha \in \{\frac{3\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}\}$

3. (1 bod) Dejte příklad ireducibilního polynomu nad $\mathbb{Z}_7$ stupně 2: např. $x^2 + 2$

4. (1 bod) Dejte příklad polynomu nad $\mathbb{R}$, jenž má kořen $\sqrt{3} + i\sqrt{5}$: např. $x^2 - 2\sqrt{3}x + 8$

5. (3 body) Napište rozklad polynomu $f = (x^3 - 3x) \cdot (x^2 + 7)$ na ireducibilní faktory nad okruhy $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$.

Rozklad nad
$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &: f = x(x^2-3)(x^2+7) \\ \mathbb{R} &: f = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+7) \\ \mathbb{C} &: f = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-i\sqrt{7})(x+i\sqrt{7}) \end{aligned}$$

6. (3 body) Určete všechna celá čísla a taková, že polynom $x^4 - ax^2 + ax + 3$ má racionální kořen:

$a = 2, 7, 14.$