Matematika II — jaro 2005 — 1. termín — **A** — 27.5.2005

1. (10 bodů) Definujte pojem lineárního zobrazení. Definujte pojem jádro lineárního zobrazení. Charakterizujte, kdy je lineární zobrazení injektivní. Definujte pojem izomorfismu vektorových prostorů. Dejte příklad dvou různých izomorfních vektorových prostorů dimenze 3.

2. (10krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** $(\{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\},+,\cdot)$ je okruh.

(b) **ano** — **ne** Každý lineární polynom nad tělesem je ireducibilní.

(c) **ano** — **ne** Polynom nad tělesem $\mathbb{R}$ je ireducibilní právě tehdy, když nemá kořen.

(d) **ano** — **ne** Násobení matic je komutativní operace.

(e) **ano** — **ne** Obsahuje-li čtvercová matice nulový sloupec, pak má determinant roven 0.

(f) **ano** — **ne** Množina $\mathbb{Z}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{R}$.

(g) **ano** — **ne** Lineární obal báze vektorového prostoru $\mathbb{V}$ je celý prostor $\mathbb{V}$.

(h) **ano** — **ne** Hodnost jednotkové matice typu $n \times n$ je n.

(i) **ano** — **ne** Součin dvou regulárních matic je regulární matice.

(j) **ano** — **ne** Hodnost matice lineárního zobrazení konečněrozměrných vektorových prostorů je rovna dimenzi obrazu tohoto zobrazení.

3. (10 bodů) Nalezněte všechna $a \in \mathbb{C}$ taková, že polynom $3x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 6ax + 2a^2 \in \mathbb{C}[x]$ má kořen 2. Pro tato a určete násobnost kořene 2.

4. (10 bodů) Rozložte racionální lomenou funkci

$$\frac{x^5 - 7x^3 + 12x}{(x^2-4)^2}$$

na součet parciálních zlomků nad $\mathbb{R}$.

5. (10 bodů) Určete determinant matice A typu $n \times n$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (10 bodů) V $\mathbb{C}$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcl} i \cdot x & + & (1+i)\cdot y & = & bi \\ (1+i)\cdot x & + & a \cdot y & = & 0 \end{array}$$

v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{C}$.

7. (10 bodů) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ jsou dány podprostory

$$\mathbf{U} = \{f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(2) = 0\}, \quad \mathbf{V} = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_1 = 0\}.$$

Určete báze a dimenze podprostorů $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

8. (10 bodů) Nalezněte předpis $f(x,y,z) = (\dots,\dots,\dots)$ lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takového, že $Ker(f) = \langle (1, 2-1), (0,1,2) \rangle$ a $f((1,1,-2)) = (1,2,0)$.

Matematika II — jaro 2005 — 1. termín — **B** — 27.5.2005

1. (10 bodů) Definujte pojem vektorového prostoru nad tělesem T. Definujte pojem báze a dimenze konečněrozměrného vektorového prostoru. Proč je tato definice korektní? Dejte příklad vektorového prostoru nad vhodným tělesem, který není konečněrozměrný.

2. (10krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** $(\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, +, \cdot)$ je okruh.

(b) **ano** — **ne** Každý lineární polynom nad tělesem je invertibilní.

(c) **ano** — **ne** Polynom nad tělesem $\mathbb{Q}$ je ireducibilní právě tehdy, když nemá kořen.

(d) **ano** — **ne** Násobení matic je asociativní operace.

(e) **ano** — **ne** Obsahuje-li čtvercová matice dva stejné sloupce, pak má determinant roven 0.

(f) **ano** — **ne** Množina $\mathbb{Z}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{Q}$ nad $\mathbb{Q}$.

(g) **ano** — **ne** Lineární obal báze vektorového prostoru $\mathbb{V}$ je ona báze.

(h) **ano** — **ne** Hodnost matice typu $m \times n$ je menší nebo rovna n.

(i) **ano** — **ne** Součet dvou regulárních matic je regulární matice.

(j) **ano** — **ne** Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektivní lineární zobrazení, pak $m \leq n$.

3. (10 bodů) Nalezněte všechna $a \in \mathbb{C}$ taková, že polynom $2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 2a^2x + 2a \in \mathbb{C}[x]$ má kořen 2. Pro tato a určete násobnost kořene 2.

4. (10 bodů) Rozložte racionální lomenou funkci

$$\frac{x^5 - 4x^3}{(x^2 - 4)^2}$$

na součet parciálních zlomků nad $\mathbb{R}$.

5. (10 bodů) Určete determinant matice A typu $n \times n$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

6. (10 bodů) V $\mathbb{C}$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcl} i \cdot x & + & (1-i) \cdot y & = & 0 \\ (1+i) \cdot x & + & ai \cdot y & = & b \end{array}$$

v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{C}$.

7. (10 bodů) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ jsou dány podprostory

$$\mathbf{U} = \{f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(-1) = 0\}, \quad \mathbf{V} = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}_3[x] \mid a_2 = 0\}.$$

Určete báze a dimenze podprostorů $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

8. (10 bodů) Nalezněte předpis $f(x, y, z) = (\dots, \dots, \dots)$ lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takového, že $Ker(f) = \langle (1, 1, 2), (3, 0, 2) \rangle$ a $f((-1, 1, 1)) = (-1, -2, 1)$.