

1. (10 bodů) Definujte pojem kořen polynomu a jeho násobnost. Zformulujte větu o počtu a násobnosti kořenů polynomu nad tělesem. Dejte příklad polynomu nad \mathbb{Q} , který nemá žádný kořen. Charakterizujte polynomy nad \mathbb{C} , které nemají žádný kořen.
2. (10krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1 , bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtete **velmi** pozorně!):
 - (a) **ano** — **ne** Zobrazení $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem $f(a + bi) = a^2 - b^2$ je homomorfismus okruhů.
 - (b) **ano** — **ne** Okruh polynomů nad tělesem \mathbb{C} je okruh s jednoznačným rozkladem.
 - (c) **ano** — **ne** Součet dvou lineárních polynomů nad tělesem \mathbb{R} je lineární polynom.
 - (d) **ano** — **ne** Jednotková matice je ve schodovitém tvaru.
 - (e) **ano** — **ne** Determinant čtvercové matice nad komplexními čísly je reálné číslo.
 - (f) **ano** — **ne** Množina $\{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ je podprostor vektorového prostoru \mathbb{R}^3 nad \mathbb{R} .
 - (g) **ano** — **ne** Dimenze konečněrozměrného vektorového prostoru je maximální počet lineárně nezávislých vektorů.
 - (h) **ano** — **ne** Dimenze vektorového prostoru matic typu 2×2 nad \mathbb{R} je 2.
 - (i) **ano** — **ne** Součet dvou řešení nehomogenní soustavy je opět řešení této soustavy.
 - (j) **ano** — **ne** Zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané předpisem $f(x, y, z) = (y, z, x)$ je izomorfismus vektorových prostorů nad \mathbb{R} .
3. (10 bodů) Určete všechny kořeny polynomu $f = 2x^5 + 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 8x + 2 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má kořen $1 + i$ a alespoň jeden racionální kořen. Rozložte polynom f na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

4. (10 bodů) Rozložte racionální lomenou funkci

$$\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

na součet parciálních zlomků nad \mathbb{R} .

5. (10 bodů) Jsou dány matice typu $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete matici X typu $n \times n$ takovou, aby $A \cdot X = B$.

6. (10 bodů) V \mathbb{Z}_5 řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x + 4y + z + u &= 4 \\ 4x + y + 3z + 4u &= 4 \\ x + 4y + 2z + 4u &= 3 \end{aligned}$$

Kolik má daná soustava řešení?

7. (10 bodů) Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 nad tělesem \mathbb{R} doplňte vektor \mathbf{u} do báze

$$\alpha = ((2, 1, 0, -1), (0, 3, 1, 0), (1, -1, 0, 1), \mathbf{u})$$

tak, aby vektor $\mathbf{v} = (1, 0, 1, -3) \in \mathbb{R}^4$ měl v bázi α souřadnice $(1, -1, -1, 1)_\alpha$.

Ověřte, že α je báze vektorového prostoru \mathbb{R}^4 .

8. (10 bodů) Nalezněte matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ daného předpisem

$$\varphi(f) = (x - 2) \cdot f$$

v bazích $\alpha = (x + 1, 2x)$, $\beta = (x + 2, x^2 - x, x^2 + 3)$.

(Připomeňme, že $\mathbb{R}_1[x]$ a $\mathbb{R}_2[x]$ jsou vektorové prostory všech polynomů nad \mathbb{R} stupně nejvýše 1, resp. 2.)

Matematika II — jaro 2005 — 2. termín — **B** — 2.6.2005

- (10 bodů) Definujte pojmy okruh, obor integrity a těleso. Dejte příklad okruhu, který není těleso. Charakterizujte $n \in \mathbb{N}$ taková, že \mathbb{Z}_n je těleso.
- (10krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1 , bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na příslušném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtete **velmi** pozorně!):
 - ano** — **ne** Zobrazení $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dané předpisem $f(a + bi) = a - bi$ je homomorfismus okruhů.
 - ano** — **ne** Okruh polynomů nad tělesem \mathbb{Q} je okruh s jednoznačným rozkladem.
 - ano** — **ne** Součin dvou lineárních polynomů nad tělesem \mathbb{R} je kvadratický polynom.
 - ano** — **ne** Jednotková matice je symetrická.
 - ano** — **ne** Determinant čtvercové matice nad \mathbb{Q} je racionální číslo.
 - ano** — **ne** Množina $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4z = x - y, x, y \in \mathbb{R}\}$ je podprostor vektorového prostoru \mathbb{R}^3 nad \mathbb{R} .
 - ano** — **ne** Dimenze konečněrozměrného vektorového prostoru je počet vektorů v bázi.
 - ano** — **ne** Dimenze vektorového prostoru matic typu 2×3 nad \mathbb{R} je 5.
 - ano** — **ne** Rozdíl dvou řešení nehomogenní soustavy je opět řešení této soustavy.
 - ano** — **ne** Zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(x, y) = (x - y, y - x)$ je izomorfismus vektorových prostorů nad \mathbb{R} .
- (10 bodů) Určete všechny kořeny polynomu $f = 2x^5 - 9x^4 + 13x^3 - 7x^2 - 4x + 2 \in \mathbb{C}[x]$, víte-li, že má kořen $1 + i$ a alespoň jeden racionální kořen. Rozložte polynom f na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- (10 bodů) Rozložte racionální lomenou funkci

$$\frac{x^3}{(x - 1)(x - 2)(x + 1)}$$

na součet parciálních zlomků nad \mathbb{R} .

5. (10 bodů) Jsou dány matice typu $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete matici X typu $n \times n$ takovou, aby $B \cdot X = A$.

6. (10 bodů) V \mathbb{Z}_5 řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z + 2u &= 1 \\ 4x + 3y + z + 2u &= 0 \\ x + 2y + 4z + 4u &= 4 \end{aligned}$$

Kolik má daná soustava řešení?

7. (10 bodů) Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 nad tělesem \mathbb{R} doplňte vektor \mathbf{u} do báze

$$\alpha = ((1, 0, 2, 0), (-1, 2, 0, 1), (0, 1, 1, -1), \mathbf{u})$$

tak, aby vektor $\mathbf{v} = (1, 3, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$ měl v bázi α souřadnice $(2, 3, 1, 2)_\alpha$.

Ověřte, že α je báze vektorového prostoru \mathbb{R}^4 .

8. (10 bodů) Nalezněte matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ daného předpisem

$$\varphi(f) = (2x + 1) \cdot f$$

v bazích $\alpha = (x - 2, 1)$, $\beta = (-x^2 + 1, 3x - 1, -x^2 + 2x)$.

(Připomeňme, že $\mathbb{R}_1[x]$ a $\mathbb{R}_2[x]$ jsou vektorové prostory všech polynomů nad \mathbb{R} stupně nejvýše 1, resp. 2.)