Matematika II — jaro 2005 — 3. termín — 9.6.2005

1. (10 bodů) Definujte pojem matice (typu $m \times n$). Definujte sčítání a násobení matic. Dejte příklad dvou nenulových matic jejichž součin je nulová matice. Definujte pojem hodnost matice. Pro matici typu $n \times n$ uveďte podmínku, která využívá pojem determinant matice, a která je ekvivalentní s faktem, že daná matice má hodnost n.

2. (10krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano — ne** $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \cap, \cup)$ je okruh. (Zde $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je množina všech podmnožin množiny $\mathbb{N}$.)

(b) **ano — ne** Jestliže polynom nad tělesem T nemá kořen, pak je ireducibilní nad T.

(c) **ano — ne** Násobnost kořene polynomu nad tělesem je menší nebo rovna stupni tohoto polynomu.

(d) **ano — ne** Každá homogenní soustava lineárních rovnic má řešení.

(e) **ano — ne** Determinant jednotkové matice typu $n \times n$ je n.

(f) **ano — ne** Prázdná množina je podprostor libovolného vektorového prostoru.

(g) **ano — ne** Podmnožina lineárně nezávislé množiny vektorů je lineárně nezávislá.

(h) **ano — ne** Dimenze vektorového prostoru polynomů stupně menšího než 4 je 3.

(i) **ano — ne** Množina všech řešení nehomogenní soustavy tvoří vektorový prostor.

(j) **ano — ne** Zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = \sin x$ je lineární zobrazení vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$.

3. (10 bodů) Nalezněte všechna $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že polynom $f = x^4 - x^3 + 2x^2 + ax + b \in \mathbb{C}[x]$ má kořen $1 + 2i$. Pro tyto dvojice a, b rozložte polynom f na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

4. (10 bodů) Rozložte racionální lomenou funkci

$$\frac{x^5}{x^3 - 1}$$

na součet parciálních zlomků nad $\mathbb{R}$.

5. (10 bodů) Určete všechna $a \in \mathbb{R}$ taková, že k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

existuje matice inverzní. Tuto inverzní matici určete.

6. (10 bodů) V $\mathbb{R}$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ ax_1 & & & & & + & x_4 & = & b \end{array}$$

v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$.

7. (10 bodů) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ nad tělesem $\mathbb{R}$ je dána množina vektorů

$$\{(0, 3, 2, 1), (2, -1, 0, 3), (1, 1, 1, 2), (1, 0, 3, 3)\}.$$

Vyberte z této množiny maximální lineárně nazávislou podmnožinu vektorů. Doplňte tuto podmnožinu na bázi $\mathbb{R}^4$ pomocí vektorů z množiny

$$\{(0, 1, -2, -1), (1, 0, -1, 1), (1, 2, 3, 1), (1, 0, 1, 2)\}.$$

8. (10 bodů) Buď dáno lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ předpisem

$$\varphi(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = (2a_1 - a_3)x^3 + (-a_0 + 2a_1 + a_2 - a_3)x^2 + (a_0 + 2a_1 - a_2 + a_3)x + (a_0 - a_2).$$

Určete bázi a dimenzi jádra $Ker(\varphi)$ zobrazení φ.

Určete bázi a dimenzi obrazu $Im(\varphi)$ zobrazení φ.

Rozhodněte, zda je zobrazení φ injektivní.

Rozhodněte, zda je zobrazení φ surjektivní.

Rozhodněte, zda je zobrazení φ izomorfismus vektorových prostorů.