Matematika II — jaro 2005 — 2. opravný termín — A — 15.6.2005

1. (10 bodů) Definujte pojem lineární nezávislost vektorů. Definujte pojem báze vektorového prostoru. Definujte pojem souřadnice vektoru v dané bázi. Dejte příklad dvou různých bazí vektorového prostoru $\mathbb{R}_2[x]$ a určete souřadnice vektoru x^2 v obou bazích.

2. (10krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je těleso.

(b) **ano** — **ne** Okruh polynomů nad tělesem $\mathbb{C}$ je okruh s jednoznačným rozkladem.

(c) **ano** — **ne** Každý polynom nad $\mathbb{R}$ lichého stupně má reálný kořen.

(d) **ano** — **ne** Sčítání matic je asociativní operace.

(e) **ano** — **ne** Elementární řádkové úpravy nemění determinant matice.

(f) **ano** — **ne** Průnik dvou podprostorů vektorového prostoru je vektorový podprostor.

(g) **ano** — **ne** Vektorový prostor $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nad tělesem $\mathbb{R}$ má dimenzi 2.

(h) **ano** — **ne** Každý n-dimenzionální vektorový prostor nad tělesem T je izomorfní vektorovému prostoru T^n.

(i) **ano** — **ne** Je-li hodnost čtvercové matice typu $n \times n$ nad tělesem T rovna n, pak má homogenní soustava $Ax = 0$ právě jedno řešení v T^n.

(j) **ano** — **ne** Jádro lineárního zobrazení obsahuje nulový vektor.

3. (10 bodů) Určete všechna $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby čísla 1 i 2 byla kořeny polynomu

$$f = x^5 - 2x^4 - x^3 + ax^2 + bx - 4 \in \mathbb{C}[x].$$

Pro tyto dvojice a, b nalezněte všechny racionální kořeny polynomu f (včetně násobností) a rozložte polynom f na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

4. (10 bodů) Rozložte racionální lomenou funkci

$$\frac{x^4}{(x^2-1)^2}$$

na součet parciálních zlomků nad $\mathbb{R}$.

5. (10 bodů) Určete determinant následující matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}.$$

6. (10 bodů) V $\mathbb{R}$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & a \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & b \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & c \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & d \end{array}$$

v závislosti na parametrech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Pro které čtveřice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ má soustava nekonečně mnoho řešení?

Pro které čtveřice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ má soustava řešení tvaru $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$?

7. (10 bodů) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ jsou dány podprostory

$$\mathbf{U} = \{f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(1) = f(0) = 0\}, \quad \mathbf{V} = \langle x^2 + 2x - 2, x^3 - x^2 - x + 2, x^3 + x^2 + 3x - 2, x^3 + 1 \rangle.$$

Určete báze a dimenze podprostorů $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

8. (10 bodů) Nalezněte předpis $f(x, y, z) = (\ldots, \ldots, \ldots)$ lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takového, že $f((1, 1, 2)) = (-1, 3, -1)$, $f((0, 1, -1)) = (-2, 0, 2)$, $f((1, 0, 2)) = (1, 2, 0)$.

Matematika II — jaro 2005 — 2. opravný termín — B — 15.6.2005

1. (10 bodů) Definujte pojem podprostor vektorového prostoru nad tělesem T. Definujte pojem lineární kombinace vektorů a pomocí něj popište podprostor vektorového prostoru generovaný danou množinou vektorů (tzv. lineární obal). Definujte pojem dimenze vektorového prostoru. Dejte příklad trojice vektorů v prostoru $\mathbb{R}_2[x]$, která v $\mathbb{R}_2[x]$ generuje podprostor dimenze 2.

2. (10krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Každý obor integrity je těleso.

(b) **ano** — **ne** Hodnota polynomu v 0 je rovna absolutnímu členu tohoto polynomu.

(c) **ano** — **ne** Okruh polynomů nad tělesem je těleso.

(d) **ano** — **ne** Transponovaná matice k matici symetrické je symetrická matice.

(e) **ano** — **ne** Determinant matice v horním trojúhelníkovém tvaru je roven součinu prvků na diagonále.

(f) **ano** — **ne** Každá matice přechodu je regulární matice.

(g) **ano** — **ne** Každé dvě báze vektorového prostoru mají stejný počet prvků.

(h) **ano** — **ne** Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$ nad tělesem $\mathbb{R}$ existuje nekonečně mnoho bazí.

(i) **ano** — **ne** Dimenze podprostoru všech řešení homogenní soustavy $Ax = 0$ je rovna hodnosti matice A.

(j) **ano** — **ne** Jádro lineárního zobrazení je vždy neprázdné.

3. (10 bodů) Určete všechna $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby čísla 1 i 2 byla kořeny polynomu

$$f = x^5 - 3x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx - 8 \in \mathbb{C}[x].$$

Pro tyto dvojice a, b nalezněte všechny racionální kořeny polynomu f (včetně násobností) a rozložte polynom f na ireducibilní faktory postupně nad $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

4. (10 bodů) Rozložte racionální lomenou funkci

$$\frac{x^5}{(x^2 - 1)^2}$$

na součet parciálních zlomků nad $\mathbb{R}$.

5. (10 bodů) Určete determinant následující matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 4 & 10 \\ -2 & -4 & -4 & 0 & 10 \\ -2 & -6 & -10 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. (10 bodů) V $\mathbb{R}$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & a \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & = & b \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & c \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & d \end{array}$$

v závislosti na parametrech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Pro které čtveřice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ má soustava nekonečně mnoho řešení?

Pro které čtveřice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ má soustava řešení tvaru $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$?

7. (10 bodů) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ jsou dány podprostory

$$\mathbf{U} = \langle x^3 - x^2 + x - 2, x^2 + 1, 2x^3 + x - 2, 3x^3 + x^2 + x - 2 \rangle, \quad \mathbf{V} = \{ f \in \mathbb{R}_3[x] \mid f(1) = f(2) = 0 \}.$$

Určete báze a dimenze podprostorů $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ a $\mathbf{U} \cap \mathbf{V}$.

8. (10 bodů) Nalezněte předpis $f(x, y, z) = (\dots, \dots, \dots)$ lineárního zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takového, že $f((0, 2, 1)) = (2, 1, 0)$, $f((1, 2, 1)) = (3, -1, -1)$, $f((-1, 1, 1)) = (0, -2, 2)$.