1. (10 bodů) Definujte pojem ireducibilního polynomu nad tělesem T. Charakterizujte ireducibilní polynomy nad $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$. Dejte příklad ireducibilního polynomu nad $\mathbb{Q}$, který není ireducibilní nad $\mathbb{R}$. Formulujte základní větu algebry.

2. (10krát ± 1 bod (správně 1 bod, chybně -1, bez odpovědi 0)) Odpovězte (škrtnutím nehodícího se **ano** nebo **ne** na patřičném řádku), zda jsou pravdivá následující tvrzení (čtěte **velmi** pozorně!):

(a) **ano** — **ne** Pro libovolné dvě čtvercové matice stejného typu A a B, platí $|A+B| = |A|+|B|$.

(b) **ano** — **ne** Je-li A regulární matice typu $n \times n$ a b typu $n \times 1$ nad tělesem T, pak má soustava $Ax = b$ právě jedno řešení v T^n.

(c) **ano** — **ne** Polynom $x^3 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ je ireducibilní nad $\mathbb{R}$.

(d) **ano** — **ne** Množina $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ je podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$.

(e) **ano** — **ne** Zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dané předpisem $f(x, y, z) = (x, yz)$ je lineární zobrazení vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$.

(f) **ano** — **ne** Ve vektorovém prostoru $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ nad $\mathbb{R}$ má vektor $\mathbf{1} + \mathbf{i}$ v bázi $\alpha = (\mathbf{1}, \mathbf{i})$ souřadnice $(1, i)$.

(g) **ano** — **ne** V okruhu polynomů nad libovolným tělesem je stupeň součinu polynomů roven součtu jejich stupňů.

(h) **ano** — **ne** Okruh $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ je těleso.

(i) **ano** — **ne** Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ stupně n má právě n kořenů (počítame-li je včetně násobnosti).

(j) **ano** — **ne** Množina všech řešení libovolné homogení soustavy nad $\mathbb{R}$ o n neznámých tvoří podprostor v $\mathbb{R}^n$.

3. (10 bodů) Nalezněte všechny racionální kořeny polynomu $4x^5 - 35x^3 + 15x^2 + 40x + 12 \in \mathbb{C}[x]$ a určete jejich násobnost.

4. (10 bodů) Rozložte racionální lomenou funkci

$$\frac{x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x - 1}{(x^2 - 2)^3}$$

na součet parciálních zlomků nad $\mathbb{Q}$.

5. (10 bodů) Určete všechna $a \in \mathbb{R}$ taková, že k matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$$

existuje matice inverzní. Tuto inverzní matici určete.

6. (10 bodů) V $\mathbb{Z}_5$ řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & & & = & 1 \end{array}$$

Kolik má daná soustava řešení?

7. (10 bodů) Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_3[x]$ jsou dány báze $\alpha = (x^2, x, x + 1, x^3 + x^2 + x + 1)$ a $\beta = (x^3, x^2, x, 1)$.

Určete souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v bázi β víte-li, že souřadnice v bázi α jsou : $(1, 3, 4, 5)$.

Určete souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ v bázi α víte-li, že souřadnice v bázi β jsou : $(2, 1, 2, -1)$.

$(1, 0, -1)$, $f((0, 1, 1)) = (1, 1, 1)$ najděte matici tohoto zobrazení v kanonické bázi.

Komentář

Úloha 1 je teoretická. Student předvede porozumění základním pojmům a výsledkům probraným na přednášce.

Úloha 2: otázky ano—ne. Kontroluje se pouze odpověď — zdůvodnění se nepožaduje (lze tedy „tipovat“). Záporné body se započítávají pouze v rámci této úlohy. (Pokud student získá záporný počet bodů, pak se do celkového součtu započítá 0.)

Zbývající úlohy 3–8 jsou na praktické počítání. Úlohy 3 a 4 se týkají polynomů, Úlohy 5–8 lineární algebry.

Úloha 3 se týká polynomů nad $\mathbb{C}$ — jejich kořenů a rozkládání na ireducibilní faktory. Viz. sbírka k polynomům, příklady 20–37.

Úloha 4 se týká rozkladů racionálních lomených funkcí nad $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$. Nebo se zde objeví příklad na počítání s Euklidovým algoritmem či Bezoutovou rovností. Viz. sbírka k polynomům, příklady 18–19, 49–51,54.

Úloha 5 je z „maticového počtu“. Tzn. příklad na výpočet součinu matic, inverzní matice, hodnosti matice či determinantu matice. Kromě příkladu s parametrem se může objevit i příklad s maticí typu $n \times n$.

Úloha 6 je na řešení soustavy rovnic. Rovnice se mohou řešit i nad tělesem $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Soustava může být s parametrem.

Úloha 7 je na báze a dimenze podprostorů, respektive na počítání souřadnic. Příklad na výpočet souřadnic může být i v jiném prostoru, např. $\mathbb{R}^4$. Mezi bázemi nemusí být standardní báze. Příklad na bázi a dimenzi může vypadat například takto:

V prostoru R^4 jsou dány podprostory

$$U = \langle (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 6) \rangle, \quad V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

Určete báze a dimenze podprostorů V, U, $V \cap U$.

Podobný příklad v polynomech může mít podprostor zadaný například takto: $U = \{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(0) = f(1) = 0\}$.

Úloha 8 se týká lineárního zobrazení. Kromě hledání matice zobrazení v daných bazích (nemusí být kanonické), se může objevit příklad na počítání jádra a obrazu lineárního zobrazení:

Určete báze a dimenze jádra a obrazu lineárního zobrazení g daného předpisem $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, g((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + x_2 - x_3, x_2 + 2x_4, 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4)$.

Taktéž lze požadovat rozhodnutí zda dané linearní zobrazení je injektivní či izomorfismus:

Určete všechny parametry $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že lineární zobrazení h dané předpisem $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3, ax_1 + bx_3)$ je injektivní. Pro vhodnou dvojici a, b dejte příklad dvou různých vektorů $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ tak, že $h(\mathbf{u}) = h(\mathbf{v})$.

1. (a) Polynom $f \in T[x]$ je ireducibilní nad tělesem T, jestliže f je nekonstantní a nelze ho rozložit na součin dvou nekonstantních polynomů.

(b) Ireducibilními polynomy v $\mathbb{R}[x]$ jsou právě lineární polynomy a kvadratické polynomy nemající reálné kořeny.

(c) Ireducibilní polynomy v $\mathbb{C}[x]$ jsou právě lineární polynomy.

(d) Příklad polynomu, který je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$, ale není ireducibilní nad $\mathbb{R}$: $x^3 - 2$.

(e) Základní věta algebry: Každý nekonstantní polynom z $\mathbb{C}[x]$ má kořen v $\mathbb{C}$.

Pozn: V některých odpovědí lze použít jiné ekvivalentní formulace. Například následující odpovědi bychom uznali.

(a) Polynom $f \in T[x]$ je ireducibilní nad tělesem T, jestliže f je nekonstantní a nelze ho rozložit na součin dvou *polynomů menšího stupně.*

(b) Ireducibilními polynomy v $\mathbb{R}[x]$ jsou právě lineární polynomy a kvadratické polynomy *se záporným diskriminantem.*

(e) Základní věta algebry: *Ireducibilní polynomy v* $\mathbb{C}[x]$ *jsou právě lineární polynomy.* nebo *Polynom* $f \in \mathbb{C}[x]$ *stupně* n *má právě* n *kořenů (počítame-li je včetně násobnosti).*

Pozn: V příkladě (d) není polynom $x^3 - 2$ ireducibilní nad $\mathbb{R}$ neboť $(x - \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4})$. Kdyby nebyl polynom $x^3 - 2$ ireducibilní nad $\mathbb{Q}$, pak by byl dělitelný lineárním polynomem nad $\mathbb{Q}$, tzn. měl by racionální kořen a to není pravda.

2. (a) ne — stačí vzít matice typu 2×2, např. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, kde $|A| = |B| = 0$, $|A + B| = 1$.
(b) ano — A je regulární právě tehdy, když k ní existuje matice inverzní a pak má příslušná soustava jediné řešení $x = A^{-1}b$.
(c) ne — polynom $x^3 + 1$ má kořen -1, tj. $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.
(d) ne — neobsahuje nulový vektor (není ani uzavřena na sčítání vektorů a násobení skalárem).
(e) ne — např. $f((0, 1, 0)) + f((0, 0, 1)) = (0, 0) + (0, 0) \neq (0, 1) = f(0, 1, 1)$.
(f) ne — protože $\mathbf{1} + \mathbf{i} = 1 \cdot \mathbf{1} + 1 \cdot \mathbf{i}$ jsou souřadnice daného vektoru $(1, 1)$. (Pozn. každá souřadnice je prvkem tělesa skalárů — zde $\mathbb{R}$.)
(g) ano — viz. přednášky.
(h) ne — k prvku $[2]_6$ neexistuje inverze.
(i) ano — základní věta algebry.
(j) ano — nulový vektor je řešením, součet dvou řešení je řešení, násobek řešení je řešení.

3. Kořeny: jednoduchý -3; dvojnásobný 2; dvojnásobný $-\frac{1}{2}$.

4.

$$\frac{x - 1}{x^2 - 2} + \frac{3x - 3}{(x^2 - 2)^2} + \frac{3x - 3}{(x^2 - 2)^3}.$$

5. Pro $a = 0$ je matice A nulová matice, ke které inverzní matice neexistuje. Pro $a \neq 0$ je

$$A^{-1} = \frac{1}{2a} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Množina všech řešení

$$\{(t + 4, 1 + 3t, t) \mid t \in \mathbb{Z}_5\} = (4, 1, 0) + \langle (1, 3, 1) \rangle.$$

má 5 prvků.

Souřadnice vektoru $\mathbf{v}$ v bázi α jsou $(-1, 3, -3, 2)$, a je to vektor $\mathbf{v} = 2x^3 + x^2 + 2x - 1$.

Řešení varianty z komentáře: Podprostor U má dimenzi dva, neboť generující množina vektorů je lineárně závislá. Báze podprostoru U je například $((1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5))$ nebo $((1, 2, 3, 4), (1, 1, 1, 1))$. Podprostor V má dimenzi dva, neboť soustava rovnic má hodnost matice 2 (a dimenze je tudíž $4 - 2$). Báze — stačí vzít dvě lineárně nezávislá řešení — např. $((3, -1, 1, 0), (-2, 2, 0, 1))$ nebo $((1, 1, 1, 1), (4, 0, 2, 1))$. Podprostor $U \cap V$ má dimenzi 1, báze $((1, 1, 1, 1))$.

8. Matice zobrazení f od báze α ke kanonické bázi $\epsilon = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ je

$$ {}_\epsilon F_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}. $$

Matice přechodu od báze α k bázi ϵ je

$$ {}_\epsilon P_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

Matici zobrazení od kanonické báze ϵ ke kanonické bázi ϵ určíme takto: ${}_\epsilon F_\epsilon = {}_\epsilon F_\alpha \cdot {}_\alpha P_\epsilon = {}_\epsilon F_\alpha \cdot ({}_\epsilon P_\alpha)^{-1}$. Výsledek (zkouškou lze zkontrolovat správnost):

$$ {}_\epsilon F_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}. $$

Řešení první varianty z komentáře: Matice lineárního zobrazení g v kanonických bazích je

$$ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}. $$

Jádro je množina řešení příslušné soustavy:

$$ Ker(g) = \{(s + 2t, -2t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1, 0), (2, -2, 0, 1) \rangle. $$

Dimenze je tedy 2, báze např. $((1, 0, 1, 0), (2, -2, 0, 1))$.

Obraz je generován sloupci matice

$$ Im(g) = \langle (1, 0, 2), (1, 1, 1), (-1, 0, -2), (0, 2, -2) \rangle. $$

Dimenze $Im(g)$ je tedy $h(M)$. Dle předchozích výpočtů (eliminace matice M) je $h(M) = 2$ a bázi lze volit $((1, 0, 2), (1, 1, 1))$. Pro kontrolu: $dim(Ker(g)) + dim(Im(g)) = 2 + 2 = 4$, což je skutečně dimenze prostoru z nějž zobrazení g vychází.

Řešení druhé varianty z komentáře:

Matice zobrazení h v kanonické bázi je

$$ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}. $$

Otázka zní, zda má příslušná homogenní soustava rovnic pouze nulové řešení. Eliminací převedeme matici do tvaru

$$ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a + b \end{pmatrix}. $$

Zobrazení h je tedy injektivní právě tehdy, když $a + b \neq 0$. Příklad: pro $a = b = 0$ máme $(1, -2, 1)$ nenulové řešení sostavy, tj. $f((1, -2, 1)) = f((0, 0, 0)) = (0, 0, 0)$.